**Департамент образования города Москвы**

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

города Москвы «**Колледж связи №54» имени П.М. Вострухина**

**УТВЕРЖДАЮ**

Зам.директора по ОУП

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Бозрова И.Г**.**

**Методические указания по выполнению практических занятий.**

**для специальности 09.02.02 Компьютерные сети**

**по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики**

**составитель Т.Н. Рудзина**

**Рассмотрено на заседании ПЦК математического и естественнонаучного цикла**

**Протокол от «\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2017г. №\_\_\_\_\_\_\_**

**Председатель ПЦК\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Бобкова О.Н.**

**2017 г.**

**Пояснительная записка.**

Согласно учебного плана Колледжа связи 54 и рабочей программы для специальности 09.02.02 (Компьютерные сети) предусмотрено 20 часов на проведение практических занятий. Каждое занятие проводится в течении 2-х часов.

Настоящие материалы разработаны с учетом рабочей программы, составленной на основе Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) среднего профессионального образования.

В процессе практического занятия согласно рабочей программы дисциплины «Элементы высшей математики», утвержденной ПЦК естественнонаучных дисциплин ГБПОУ КС №54, студенты выполняют практические занятия под руководством преподавателя в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

Выполнение студентами практических занятий направлено на:

— обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний;

— формирование умений применять полученные знания в практической деятельности;

— развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений;

— выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы.

Практические занятия выполняются по следующим темам дисциплины «Элементы высшей математики»:

Р**аздел 1. Линейная алгебра.**

Р**аздел 2. Элементы аналитической геометрии.**

Р**аздел 3. Основы теории комплексных чисел.**

**Раздел 4. Основы математического анализа.**

**Раздел 5. Численные методы.**

.

Цель и задачи практических занятий:

В результате выполнения практических занятий обучающийся должен

*уметь*:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

*знать*:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;

- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики;

- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Практические занятия - один из видов практического обучения, имеющий целью закрепление теоретических знаний и формирование практических умений и навыков.

Практическая работа по математике заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий, направленных на усвоение основ учебной дисциплины «Элементы высшей математики», приобретение практических навыков решения примеров и задач. Выполнение практической работы студенты производят в письменном виде, оформляя отчеты в отдельной тетради для практических работ. Отчет предоставляется преподавателю, ведущему данную дисциплину для проверки.

Практические занятия способствуют более глубокому пониманию теоретического материала учебного курса, а также развитию, формированию и становлению различных уровней составляющих профессиональной компетентности студентов, пониманию межпредметных связей. Основой практикума выступают типовые задачи, которые должен уметь решать студент, изучающий дисциплину «Элементы высшей математики» и обучающихся по специальности «Компьютерные сети».

Для лучшего усвоения студентами изучаемого материала и получения уверенных навыков решения примеров и задач при проведении практических занятий целесообразно использовать различные методы и приемы:

- рассмотрение решения типовых примеров в форме видеолекции;

- исследовательская работа при решении примеров и практических задач;

- работа в группах;

- применение компьютерных программ для решения математических задач.

*Содержанием практических занятий являются*

— Выполнение вычислений, расчетов;

— Работа со справочниками, таблицами.

*Необходимые структурные элементы практического занятия:*

— Инструктаж, проводимый преподавателем;

— Самостоятельная деятельность студентов;

— Анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированных умений.

Перед выполнением практического занятия проводится проверка знаний студентов на предмет их готовности к выполнению задания.

Методические указания к выполнению практических работ содержат :

* Тему занятия;
* Цель занятия;
* Задачи;
* Обеспечение практической работы:
* Теоретические сведения и методические рекомендации

по решению задач.

* Пояснения (основные формулы, необходимые для выполнения практического занятия);
* Порядок выполнения занятия;
* Используемую литературу.

Оценки за выполнение являются показателями текущей успеваемости студентов по дисциплине «Элементы высшей математики».

Критерии оценки практических заданий.

**Отметка «5»** ставится, если:

* работа выполнена полностью;
* в логических  рассуждениях и обосновании решения нет пробе­лов и ошибок;
* в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала).

**Отметка «4»** ставится, если:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

* допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

**Отметка «3»** ставится, если:

допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех

несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными

умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не

менее половины работы.

**Отметка «2»** ставится, если:

      допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет

      обязательными умениями по данной теме в полной мере.

**Отметка «1»** ставится, если:

работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний и

умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена

не самостоятельно.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

# 

**ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики** для 09.02.02 - 2-й курс

**Практическое занятие № 1.**

**Тема: Операции над матрицами. Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы.**

**Цель:** Приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики*.* Проверка усвоения знаний по вычислению определителей 2-го и 3-го порядков, выполнения действий над матрицами, нахождению алгебраических дополнений и нахождение обратной матрицы. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Обеспечение практической работы:***

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.

Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2010-380с.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Операции над матрицами. Вычисление определителей.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

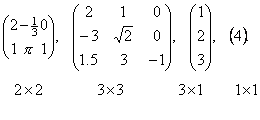
**›** Выполнить самостоятельную работу №1.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

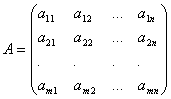
**по решению задач.**

*Матрицей размером m*×*n* называется совокупность *m·n* чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из *m* строк и *n* столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:



Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, *А* или *В*.

В общем виде матрицу размером *m*×*n* записывают так

.

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами *aij*: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, *a23* – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image006.gif, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

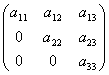
Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image008.gif.

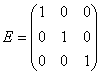
*Главной диагональю* квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.



Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

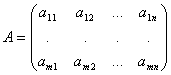
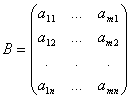
.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, или http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image016.gif.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой E. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид .

**ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.**

**Равенство матриц**. Две матрицы *A* и *B* называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны *aij* = *bij*. Так если http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image020.gifи http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image022.gif, то *A=B*, если *a11 = b11, a12 = b12, a21 = b21* и *a22 = b22*.

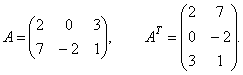
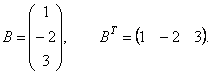
**Транспонирование**. Рассмотрим произвольную матрицу *A* из *m* строк и *n* столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу *B* из *n* строк и *m* столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы *A* с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы *A* с тем же номером). Итак, если , то .

Эту матрицу *B* называют *транспонированной* матрицей *A*, а переход от *A* к *B транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице *A*, обычно обозначают *AT*.

Связь между матрицей *A* и её транспонированной можно записать в виде http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image028.gif.

**Пример.** Найти матрицу, транспонированную данной.

1. 
2. 

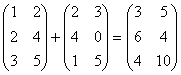
**Сложение матриц.** Пусть матрицы *A* и *B* состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы *A* и *B* нужно к элементам матрицы *A* прибавить элементы матрицы *B*, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц *A* и *B* называется матрица *C*, которая определяется по правилу, например,

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image034.gif

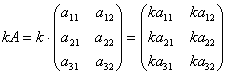
или

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image036.gif

**Примеры.** Найти сумму матриц:

1. .
2. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image040.gif- нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image042.gif.

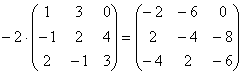
Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному *A+B=B+A* и ассоциативному (*A+B*)+*C*=*A*+(*B+C*).

**Умножение матрицы на число.** Для того чтобы умножить матрицу *A* на число *k* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы *A* на число *k* есть новая матрица, которая определяется по правилу или http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image046.gif.

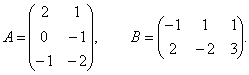
Для любых чисел *a* и *b* и матриц *A* и *B* выполняются равенства:

1. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image048.gif
2. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image050.gif
3. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image052.gif.

**Примеры.**

1. .
2. Найти 2A-B, если http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image056.gif, http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image058.gif.

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image060.gif.

1. Найти *C*=–3*A*+4*B*.

Матрицу *C* найти нельзя, т.к. матрицы *A* и *B* имеют разные размеры.

**Умножение матриц.** Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). *Произведением* матрицы *A* не матрицу *B* называется новая матрица *C=AB*, элементы которой составляются следующим образом:

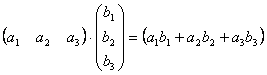
http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image064.gif.

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице *C*) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце *c13*, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

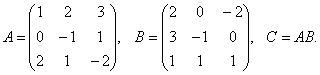
В общем случае, если мы умножаем матрицу *A = (aij)* размера *m*×*n* на матрицу *B = (bij)* размера *n*×*p*, то получим матрицу *C* размера *m*×*p*, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент *cij* получается в результате произведения элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B* и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

.

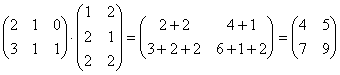
**Примеры.**

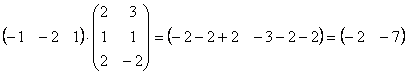
1. Пусть 

Найти элементы *c12*, *c23* и *c21* матрицы *C*.

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image070.gif

1. Найти произведение матриц.

.

1. .
2. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image076.gif- нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.
3. Пусть http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image078.gif

Найти *АВ* и *ВА*.

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image080.gif

1. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image082.gif

Найти *АВ* и *ВА*.

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image084.gif, *B·A* – не имеет смысла.

**ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.**

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image020.gif.

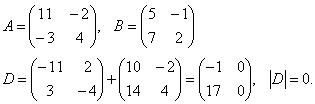
*Определителем второго порядка*, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: *a11a22 – a12a21*.

Определитель обозначается символом http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image091.gif.

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

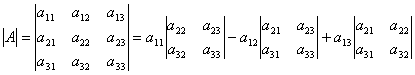
**Примеры.** Вычислить определители второго порядка.

1. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image093.gif
2. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image095.gif.
3. Вычислить определитель матрицы *D*, если *D= -А+2В* и



Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.

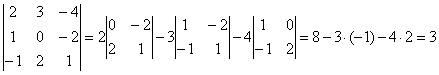
*Определителем третьего порядка*, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

.

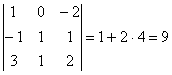
Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки *a11, a12, a13* и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

**Примеры.** Вычислить определитель третьего порядка.

1.

.

2.



**Задания для совместной работы.**

1. Найдите матрицу C = A + B, если A = , B = .
2. Найдите матрицу C = A + B, если A = , B = .
3. Вычислите: 2A + 3B – C, если А = , В = , С =
4. Произведите умножение двух матриц а) ⋅, б)⋅.
5. Вычислите определитель второго порядка .
6. Вычислите определитель третьего порядка .
7. Запишите все миноры определителя .
8. Найдите алгебраические дополнения , , для определителя .
9. Разложите определитель по:

а) элементам первой строки;

б) элементам второго столбца.

1. Найдите обратную матрицу для матрицы А = .

**Самостоятельная работа №1 по теме 1.1.**

**Вариант 1.**

1. Найдите матрицу C = + 2В, если А= , В = .
2. Найдите: А ⋅ В – В ⋅ А, где А = , В = .
3. Вычислите: 3А ⋅ 2В, если А = , В = .
4. Найдите обратную матрицу для матрицы А = .

**Вариант 2.**

1. Найдите матрицу C = + 2В, если А= , В = .
2. Найдите: А ⋅ В – В ⋅ А, где А = , В = .
3. Вычислите: 3А ⋅ 2В, если А = , В = .
4. Найдите обратную матрицу для матрицы А = .

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
14. Что называется определителем матрицы?
15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
16. Что называется минором?
17. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
18. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
19. Перечислите свойства определителя.
20. Какая матрица называется невырожденной?
21. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
22. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

**Практическое занятие №2.**

**Тема:** **Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса.**

**Цель:**приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики*.* Проверка усвоения знаний по системам n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера и методом Гаусса. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Обеспечение практической работы:***

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.

Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2008-380с.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Системы n линейных уравнений с n переменными».

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №2 по решению СЛАУ.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

**по решению задач.**

***Метод Крамера.***

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

det A ≠ 0;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

***Теорема. (Правило Крамера):***

**Теорема.** *Система из n уравнений с n неизвестными*

**

*в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:*

*xi = Δi/Δ, где*

*Δ = det A, а Δi – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов bi.*

*Δi = *

Пример.



A = ; Δ1= ; Δ2= ; Δ3= ;

x1 = Δ1/detA; x2 = Δ2/detA; x3 = Δ3/detA;

Пример. Найти решение системы уравнений:



Δ = = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

Δ1 =  = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.

x1 = Δ1/Δ = 1;

Δ2 =  = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.

x2 = Δ2/Δ = 2;

Δ3 =  = 5( 32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.

x3 = Δ3/Δ = 3.

Если система однородна, т.е. bi = 0, то при Δ≠0 система имеет единственное нулевое решение x1 = x2 = … = xn = 0.

При Δ = 0 система имеет бесконечное множество решений.

**Метод Гаусса (последовательного исключения неизвестных).**

**Метод Гаусса – это просто!** Почему? Известный немецкий математик Иоганн Карл Фридрих Гаусс еще при жизни получил признание величайшего математика всех времен, гения и даже прозвище «короля математики». **А всё гениальное, как известно – просто!** Кстати, на деньги попадают не только лохи, но еще и гении – портрет Гаусса красовался на купюре в 10 дойчмарок (до введения евро), и до сих пор Гаусс загадочно улыбается немцам с обычных почтовых марок.

Метод Гаусса прост тем, что для его освоения ДОСТАТОЧНО ЗНАНИЙ ПЯТИКЛАССНИКА. **Необходимо уметь складывать и умножать!** Не случайно метод последовательного исключения неизвестных преподаватели часто рассматривают на школьных математических факультативах. Сначала немного систематизируем знания о системах линейных уравнений. Система линейных уравнений может:

1) Иметь единственное решение.  
2) Иметь бесконечно много решений.  
3) Не иметь решений (быть *несовместной*).

Метод  Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения **любой** системы линейных уравнений. Как мы помним, [**правило Крамера и матричный метод**](http://www.mathprofi.ru/pravilo_kramera_matrichnyi_metod.html) непригодны в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна. А метод последовательного исключения неизвестных **в любом случае** приведет нас к ответу! На данном уроке мы опять рассмотрим метод Гаусса для случая №1 (единственное решение системы), под ситуации пунктов №№2-3 отведена статья [Несовместные системы и системы с общим решением](http://www.mathprofi.ru/slu_nesovmestnye_sistemy_i_sistemy_s_obshim_resheniem.html). Замечу, что сам алгоритм метода во всех трёх случаях работает одинаково.

Вернемся к простейшей системе с урока [**Как решить систему линейных уравнений?**](http://www.mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html)  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image002.gif и решим ее методом Гаусса.

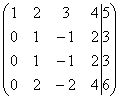
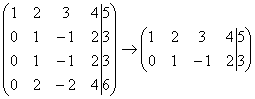
На первом этапе нужно записать *расширенную матрицу системы*:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image004.gif. По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно. Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

***Справка***: *рекомендую запомнить* ***термины*** *линейной алгебры.* ***Матрица системы*** *– это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном примере матрица системы: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image006.gif.* ***Расширенная матрица системы*** *– это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image004_0000.gif. Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.*

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются *элементарными преобразованиями*.

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) **Строки** матрицы **можно** **переставлять** местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую строки: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image008.gif

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует **удалить** из матрицы все эти строки кроме одной. Рассмотрим, например матрицу . В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из них: .

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует **удалить**. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой *одни нули*.

4) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, отличное от нуля. Рассмотрим, например, матрицу http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image014.gif. Здесь целесообразно первую строку разделить на –3, а вторую строку – умножить на 2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image016.gif. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно **прибавить другую строку, умноженную на число**, отличное от нуля. Рассмотрим нашу матрицу из практического примера: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image004_0001.gif. Сначала я распишу преобразование очень подробно. Умножаем первую строку на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image019.gif, и **ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на –2**: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image021.gif. Теперь первую строку можно разделить «обратно» на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image023.gif. Как видите, строка, которую ПРИБАВЛЯ**ЛИ** – не изменилась. **Всегда** меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯ**ЮТ**.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image025.gif  
Еще раз: ко второй строке **прибавили первую строку, умноженную на –2**. Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image027.gif»

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image029.gif, и ко второй строке прибавляю первую: 2 + (–2) = 0. Записываю результат во вторую строку:  http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image031.gif»

«Теперь второй столбец. Вверху –1 умножаю на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image033.gif. Ко второй строке прибавляю первую: 1 + 2 = 3. Записываю результат во вторую строку:  http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image035.gif»

«И третий столбец. Вверху –5 умножаю на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image037.gif. Ко второй строке прибавляю первую: –7 + 10 = 3. Записываю результат во вторую строку:  http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image025_0000.gif»

Пожалуйста, тщательно осмыслите этот пример и разберитесь в последовательном алгоритме вычислений, если вы это поняли, то метод Гаусса практически «в кармане». Но, конечно, над этим преобразованием мы еще поработаем.

**Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений**

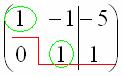
**! ВНИМАНИЕ**: рассмотренные манипуляции **нельзя использовать**, если Вам предложено задание, где матрицы даны «сами по себе». Например, при «классических» [**действиях с матрицами**](http://www.mathprofi.ru/deistviya_s_matricami.html) что-то переставлять внутри матриц ни в коем случае нельзя!  
  
Вернемся к нашей системе http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image002_0000.gif. Она практически разобрана по косточкам.

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к *ступенчатому виду*:

http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image040.gif

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. И снова: почему первую строку умножаем именно на –2? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

**Цель элементарных преобразований** *–* привести матрицу к ступенчатому виду: . В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется *трапециевидный вид* или *треугольный вид*.

 В результате элементарных преобразований получена *эквивалентная* исходной система уравнений:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image044.gif

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется *обратным ходом метода Гаусса*.

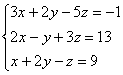
В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image046.gif.

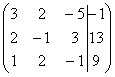
Рассмотрим первое уравнение системы http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image048.gif и подставим в него уже известное значение «игрек»:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image050.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image052.gif

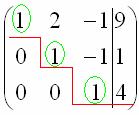
Ответ: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image054.gif

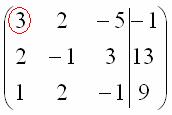
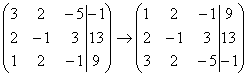
Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1

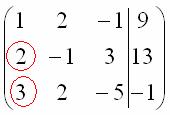
Решить методом Гаусса систему уравнений:  


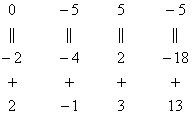
Запишем расширенную матрицу системы:  


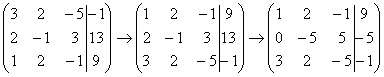
Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:  
  
И повторюсь, наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

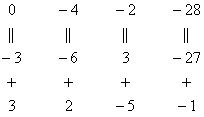
Сначала смотрим на левое верхнее число:   
  
Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Вообще говоря, устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:  


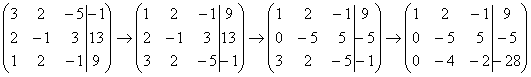
**Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения**. Уже легче.

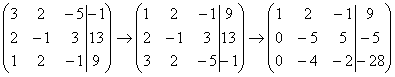
Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:  


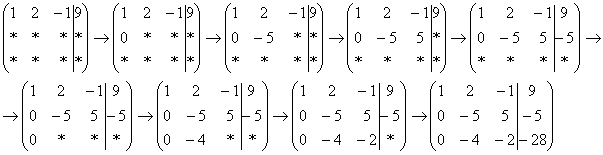
Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:  


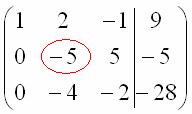
Результат записываем во вторую строку:  


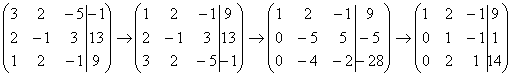
Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:  


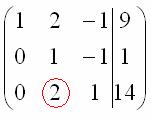
Результат записываем в третью строку:  


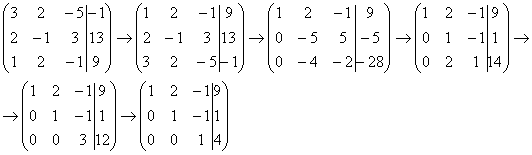
На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:  


**Не нужно считать всё сразу и одновременно**. Порядок вычислений и «вписывания» результатов **последователен** и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку – ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО и **ВНИМАТЕЛЬНО**:  
  
А мысленный ход самих расчётов я уже рассмотрел выше.

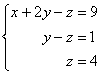
Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:  


В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:  


На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:  


Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:  
  
Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на –2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:  
  
Круто.

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image090.gif

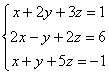
Смотрим на второе уравнение: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image092.gif. Значение «зет» уже известно, таким образом:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image094.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image096.gif

И, наконец, первое уравнение: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image098.gif. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image100.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image102.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image104.gif

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image106.gif

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

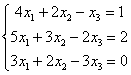
Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса  


Это пример для самостоятельного решения, образец чистового оформления и ответ в конце урока.

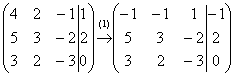
Следует отметить, что ваш **ход решения** может не совпасть с моим ходом решения, **и это – особенность метода Гаусса**. Но вот ответы обязательно должны получиться одинаковыми!

Пример 3

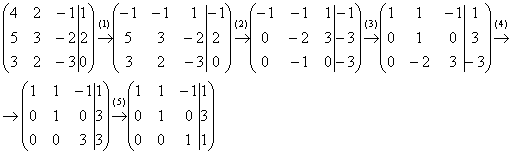
Решить систему линейных уравнений методом Гаусса  


Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:  


Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:   
(1) **К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1**. То есть, мысленно умножили вторую строку на –1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.



Теперь слева вверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на –1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:  


(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на –1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

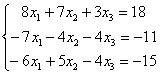
(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу получилось что-нибудь вроде http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image118.gif, и, соответственно, http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image120.gif, то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

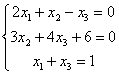
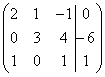
Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу вверх. Да тут подарок получился:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image122.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image124.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image126.gif

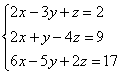
**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image128.gif.

Пример 4

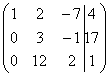
Решить систему линейных уравнений методом Гаусса  


Это пример для самостоятельного решения, он несколько сложнее. Ничего страшного, если кто-нибудь запутается. Полное решение и образец оформления в конце урока. Ваше решение может отличаться от моего решения.

В последней части рассмотрим некоторые особенности алгоритма Гаусса.  
Первая особенность состоит в том, что иногда в уравнениях системы отсутствуют некоторые переменные, например:  
  
Как правильно записать расширенную матрицу системы? В расширенной матрице системы на месте отсутствующих переменных ставим нули:  
  
Кстати, это довольно легкий пример, поскольку в первом столбце уже есть один ноль, и предстоит выполнить меньше элементарных преобразований.

Вторая особенность состоит вот в чём. Во всех рассмотренных примерах на «ступеньки» мы помещали либо –1, либо +1. Могут ли там быть другие числа? В ряде случаев могут. Рассмотрим систему: .

Здесь на левой верхней «ступеньке» у нас двойка. Но замечаем тот факт, что все числа в первом столбце делятся на 2 без остатка – и другая двойка и шестерка. И двойка слева вверху нас устроит! На первом шаге нужно выполнить следующие преобразования: ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –1; к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3. Таким образом, мы получим нужные нули в первом столбце.

Или еще такой условный пример: . Здесь тройка на второй «ступеньке» тоже нас устраивает, поскольку 12 (место, где нам нужно получить ноль) делится на 3 без остатка. Необходимо провести следующее преобразование: к третьей строке прибавить вторую строку, умноженную на –4, в результате чего и будет получен нужный нам ноль.

Метод Гаусса универсален, но есть одно своеобразие. Уверенно научиться решать системы другими методами (методом Крамера, матричным методом) можно буквально с первого раза – там очень жесткий алгоритм. Но вот чтобы уверенно себя чувствовать в методе Гаусса, следует «набить руку», и прорешать хотя бы 5-10 систем.

**Задания для совместной работы.**

1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

а) б) в) г)

1. Решите систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Крамера

**Индивидуальная самостоятельная работа №2.**

**Вариант – 1.**

**Вариант –2.**

;

**Вариант –3**.

;

**Вариант –4.**

;

**Вариант –5.**

;

**Вариант –6.**

;

**Вариант –7.**

;

**Вариант –8.**

;

**Вариант –9.**

*;*

**Вариант –10.**

;

**Вариант –11.**

.

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Системы линейных алгебраических уравнений: основные понятия и определения.
2. Матричная запись СЛАУ.
3. Решение СЛАУ по формулам Крамера
4. Методом обратной матрицы
5. Методом Гаусса.
6. Общее решение СЛАУ.
7. Однородные СЛАУ, свойства их решений.
8. Условия существования ненулевых решений однородных СЛАУ.

**Практическое занятие 3.**

**Тема: Составление уравнений прямых и кривых 2-го порядка, их построение.**

**Цель:** Проверка усвоения знаний по составлению уравнений прямых и кривых 2-го порядка.. Повторить и систематизировать знания по данной теме. Освоить способы составления уравнений прямых и кривых 2-го порядка, их

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| построение. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Составление уравнений прямых и кривых 2-го порядка, их построение**».**

Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №3.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

**по решению задач.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Прямые на плоскости** могут быть заданы следующими уравнениями: | | | | | | | | | | |  |  |
| 1. | Общее уравнение прямой *Ax*  *By*  *C*  0 , где *A* и *B* - координаты нормального | | | | | | | | | | |  |
| вектора. |  |  |  |  |  |  |  |  |  | R | *A*; *B*. |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Вектор *n* , перпендикулярный данной прямой, называется нормальным *n* | | | | | | | | | | |  |
| 2. | Уравнение прямой, проходящей через данную точку *M* *x*0 ; *y*0  перпендикулярно | | | | | | | | | | |  |
|  | R | R | | | | R | | | | |  |  |
| данному вектору *n**A*; *B*, т.е. *n*  *MM* 0 , значит | | | | | | *n*  *MM* 00 ,где *M* *x*; *y*-текущая точка | | | | | |  |
| прямой *l* . И в координатной форме *A**x*  *x*0  *B**y*  *y*0   0 . | | | | | | | | | | |  |  |
| 3. | Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки *M* 1 *x*1 ; *y*1  и *M* 2 *x*2 ; *y*2  | | | | | | | | | | |  |
|  |  | *l* : | | *x*  *x*1 | |  | | *y*  *y*1 | |  |  |  |
|  |  | *x*2 *x*1 | | *y*2 *y*1 | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4. | Параметрические уравнения прямой. | | | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  | R | *a*2,определенный прямой *l* ,называется направляющим | | | | | | | | | |  |
| Любой вектор *a**a*1; | |  |
| вектором. | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Пусть прямая *l* проходит через 2 точки *M* *x*; *y* и *M* 0 *x*0 ; *y*0 . *t* - параметр, | | | | | | | | | | | |  |
| принимающий различные числовые значения. | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | ***x***  ***x0***  ***a1 t*** | | | | | | | | |  |  |
|  |  |  | | | |  ***a2 t*** | | | | |  |  |
|  |  | ***y***  ***y0*** | | | |  |  |
| 5. | Каноническое уравнение прямой. | | | | |  |  |  |  | R | *a*1; *a*2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Пусть прямая *l* проходит через точку *M* 0 *x*0 ; *y*0 , параллельно вектору *a* | | | | | | | | | | |  |
|  |  |  | *x*  *x*0 | |  | | *y*  *y*0 | | . | |  |  |
|  |  |  |  | |  | |  |  |
|  |  |  |  | *a*1 | |  |  | *a*2 | | |  |  |

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси *Ox* , называется угловым коэффициентом, т.е. *tg* **  *k* .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пусть даны 2 точки прямой *M* 1 *x*1 ; *y*1  и *M* 2 | *x*2 | ; *y*2 , тогда *k*  | *y*2 |  *y*1 | . |  |
| *x*2 |  |  |
|  |  |  |  *x*1 | |  |

**Угол между прямыми**,заданными

1. общими уравнителями.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пусть прямые *l*1 и *l*2 | заданы общими уравнителями | | | | | | | | |  |  |  |
| *l*1: *A*1 *x*  *B*1 *y*  *C*10 | , тогда cos **  |  |  | *A*1 *A*2 *B*1 *B*2 | | | |  |  |  | ; |  |
|  |  |  |  |  |
| *l*2: *A*2 *B*2 *y*  *C*20 |  |  |  | |  |  | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *A*2 |  *B* 2 | | *A*2 |  *B* 2 | | |  |
|  |  |  | 1 | 1 |  | 2 | 2 | | |  |  |  |

1. уравнениями с угловым коэффициентом.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *l*1 : *k*1 *x*  *b*1 , тогда cos **  |  |  | *k*1 *k*21 | | |  |  |  | ; |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *l*2: *k*2 *x*  *b*2 | | *k*121 *k*221 | | | | | | |  |  |



1. каноническими уравнениями.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пусть прямые *l*1 и *l*2 | | | | | | | | | | заданы уравнениями | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *l* : | |  | *x*  *x*1 |  |  | *y*  *y*1 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  | *a*1 | |  |  | *a*2 | |  |  |  |  | *a*1*b*1 *a* | | 2 *b*2 | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | , тогда cos **  | |  |  |  |  |  |  | . |  |
|  |  |  | *x*  *x*2 | |  |  | *y*  *y*2 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *l*2 | : |  |  |  |  |  |  | *a* 2 |  *a* 2 |  |  | *b* 2 |  |  *b* 2 | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 1 | | | 2 |  | 1 | |  | 2 | |  |  |  |
|  | *b*1 | |  | *b*2 | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



**Условия перпендикулярности прямых**,заданных

1. общими уравнениями.

*A*1 *A*2 *B*1 *B*20;

1. уравнениями с угловым коэффициентом. *k*1 *k*21;
2. каноническими уравнениями.

*a*1*b*1 *a*2 *b*20.

**Кривые второго порядка. Окружность.**

Окружностью называется смежность точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называется центром.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом *R* имеет вид *x* 2 *y* 2 *R* 2.

Уравнение окружности с центром в точке *O*1 *a*; *b* и радиусом *R* имеет вид

*x*  *a*2*y*  *b*2 *R* 2.

**Эллипс.**

Эллипсом называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости постоянна и больше расстояния между этими точками.

Данные точки *F*1  *c*; 0 и *F*2 *c*; 0 - называются фокусами, а расстояние между ними – фокусным расстоянием. *F*1 *F*2  2*c* .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Каноническое уравнение эллипса имеет вид | | | *x* 2 |  | *y* 2 |  1, где *a*, *b* - полуоси, причем | | |  |
| *a* 2 | *b* 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| *b* 2 *a* 2 *c* 2, *a* –большая полуось, *b* –малая. | | | |  |  |  |  |  |  |
| Отношение | *c* | называется эксцентриситетом эллипса **  | | | | | *c* | . |  |
|  |  |  |
|  | *a* | | |  |  |  | *a* | |  |

**Гипербола.**

Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек плоскости постоянен и меньше расстояния между этими точками.

Данные точки называются фокусами гиперболы *F*1  *c*; 0 и *F*2 *c*; 0, *F*1 *F*2  2*c* .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Каноническое уравнение гиперболы имеет вид | *x* 2 |  | *y* 2 |  1 , где |  |
| *a* 2 | *b* 2 |  |
|  |  |  |  |

*a* -действительная полуось, *b* -минимальная полуось,причем *b* 2 *c* 2 *a* 2.Отношение полуфокусного расстояния к действительной полуоси называется

эксцентриситетом гиперболы **  *c* . Так как *c*  *a*, то **  1 . Гипербола имеет 2 асимптоты *a*

*y*  *b x* . *a*

**Парабола.**

Параболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки равно расстоянию до данной прямой, не проходящей через данную точку.

Данная точка называется фокусом параболы, данная прямая директрисой. Расстояние от фокуса до директрисы называется фокальным параметром.

Уравнение параболы, осью симметрии которой является ось *Ox* и ветви направлены в право имеет вид *y* 2  2 *px* , уравнение директрисы *x*  *p*2 .

Если ветви параболы направлены влево, то уравнение имеет вид *y* 2 2 *px* , уравнение директрисы *x*  *p*2

Если ветви параболы направлены вверх, а осью симметрии является ось *Oy* , то уравнение параболы имеет вид *x* 2  2 *py* , уравнение директрисы *y*  *p*2 .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Если *Oy* | | | | | | | | | | | | | - ось симметрии, а ветви параболы направлены вниз, то уравнение имеет вид | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| *x* 22 *py* ,уравнение ее директрисы *y*  *p* 2. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **Пример 1.** Найти угол между прямыми*l*1: 5*x*12*y*160и*l*2: 3*x*4*y*120. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
|  | Решение. Прямые *l*1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | и *l*2 заданы общим уравнением, поэтому используем формулу | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| cos **  | | |  |  |  |  |  |  | *A*1 *A*2 | | | | | | | |  |  *B*1 *B*2 | | | | | | | | | |  |  |  |  |  | . | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
|  | |  | | | | | | | | | | | | |  | | |  | | | | | | | | | | |  |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
|  |  |  |  |  |  | *A*2 *B* 2 | | | | | | | | | | |  | |  |  |  | *A*2 | | |  | | | | | *B* 2 | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 1 | |  |  |  |  |  | 1 | | |  |  | 2 | | | | | |  |  |  |  |  | 2 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | У нас *A*1 | | | | | | | | | | | | |  5, | | | | |  |  |  | *B*1 | | | 12, | | | | | | | | | |  |  | *A*23, | | | | | *B*24,подставляя в формулу получаем | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| cos **  | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 5  3 12  4 | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  | 33 | ; **  arccos | | | | | | | 33 | | |  59,5 . | | | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 122 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |
|  |  |  | 52  | | | | | | | | | | |  | |  | |  | | | | | | 32  42 | | | | | | | | |  |  | 65 | |  |  |  | 65 | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **Пример 2.** При каком значении параметра*k*прямые*l*1:*y*5*x*4и*l*2:*y**kx*2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| перпендикулярны? | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | Решение. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами. Условие | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| перпендикулярности имеет вид *k*1  *k*2 1. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | У нас *k*1 | | | | | | | | | | | | |  5, | | | | |  | *k*2 | | | | | - неизвестно, значит 5  *k*2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1, | | | | |  | *k*2 | 1 | . |  |  |  |  |  |
|  |  |  |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
|  | **Пример 3.**Вычислить угол между прямыми,заданными каноническими уравнениями | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| *l* : | *x* 1 |  |  | | |  | *y* 3 | | | | | | | | ; *l* | |  |  | : | *x* | | |  | | | |  | *y* 1 | | | | | | . | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  | | 2 | |  | | |  |  | | |  | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 |  |  |  |  |  | 5 | | | | | |  |  |  |  | 2 | | | |  |  |  3 | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | Решение. Косинус угла между прямыми будем вычислять по формуле | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
|  | | | | R | | |  | R | |  |  |  |  |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
|  | | | |  |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| cos **  | | |  | *a* | |  | *b*R | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  | | | | | 1 5  5  3 | | | | | | | | | | | | |  | | |  |  | 13 | | |  |  |  |  | | 1 | |  | . **  arccos | | | 1 | |  |  45 . |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | R | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *a* | | |  | | *b* | | | |  |  |  |  |  | 12  52  22   32 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  | 26  13 | | | | | 2 | | | | | 2 | | | | | |  |  |  |
|  | | | | | | | |  | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |

**Пример 4.**В треугольнике с вершинами в точках*M*15; 2,*M*25; 6,*M*31; 2проведена медиана *M* 1 *A*1 . Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A*1 перпендикулярно медиане *M* 1 *A*1 .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| R |  *M*1 *A*1. |  |
| Решение. За нормальный вектор искомой прямой можно принять вектор *n* |  |

Чтобы найти координаты вектора *n* , найдем координаты точки *A*1 ; точка *A*1 - середина

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| отрезка *M* |  | *M* |  | , поэтому *x*  | 5  1 |  3; | *y*  | 6  2 |  2 . |  |
| 2 | 3 |  |  |  |
|  |  | 1 | 2 |  | 1 | 2 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | R |  *M* 1 *A*1имеет координаты358и220 ,т.е. *M* 1 *A*18; 0. | | | | | |  |
| Вектор *n* | | | |  |

Уравнение искомой прямой ищем как уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору 8*x*  3 0*y*  2  0, *x*  3 .

**Пример 5.**Найти координаты точек пересечения прямых*l*1:*x**y*30и*l*2: 3*x* 2 *y* 90.

Решение. Чтобы найти координаты точки пересечения прямых, решаем систему уравнений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*  *y* 30 | *x* 3 *y* |  |
| 3*x*  2 *y*  9  0 | *y* 0; *x* 3. |  |
| 3 3  *y* 2 *y*  9  0 |  |
| Ответ: точка *A* 3; 0. |  |  |

**Пример 6.**Доказать,что уравнение*x*2*y*24*x*2*y*40является уравнениемокружности. Найти ее центр и радиус.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения *x* 2  4*x*  4  4  *y* 2  2 *y*  1 1  4  0 , *x* 22*y* 129 -это уравнение окружности с центром в точке *O* 2;1и радиусом

равным 3 .

**Пример 7.**Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат,если ее

директрисой служит прямая *x* 4 .

Решение. Расстояние от директрисы до начала координат равно *p*2 , значит, *p*2  4, т.е. *p*  8 . Уравнение этой параболы имеет вид *y* 2  2 *px* . Значит, *y* 2  16*x*.

**Пример 8.**Доказать,что уравнение20*x*229*y*2580является уравнением параболы.Найти координаты фокусов.

Решение. Разделив оби части уравнения на 580 , получим *x* 2  *y* 2  1 . Это уравнение

29 20

гиперболы, для которой *a* 2  29, *b* 2  20 . Из соотношения *c* 2  *a* 2  *b* 2 находим

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *c* 2 |  29  20  49, *c* 7. Следовательно, фокусы гиперболы находятся в точках *F*1  7; 0 | | | | | | | | | | |  |
| и *F*2 7; 0. | | | | | | |  |  |  |  |  |  |
|  |  | **Пример 9.**Доказать,что уравнение36*x*2100*y*236000является уравнением | | | | | | | | | |  |
| эллипса. Найти координаты фокусов и фокальное расстояние. | | | | | | | | |  |  |  |  |
|  |  | Решение. Разделив обе части уравнения на 3600 , получим | | | | | | *x* 2 |  | *y* 2 |  1. Это |  |
|  |  |  |  |  |
| уравнение является уравнением эллипса. | | | | | | | 100 | | 36 | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | Из равенства *a* 2  *c* 2  *b* 2 следует, что *c* 2  *a* 2  *b* 2 . Так как *a* 2 | | | | | | |  100 и *b* 2  36 , то | | |  |
| *c* 2 |  64 , откуда *c* 8 . Фокусы эллипса будут находиться в точках *F*1  8; 0 и *F*2 8; 0. | | | | | | | | | | |  |
| Фокальное расстояние | | |  | *F*1 *F*2 |  |  16 . |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | **Задание для выполнения практической работы.** | | | | | | | | | |  |
| № вариан | | | | | | | **Задание** | |  |  |  |  |
|  | та |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1.Найти координаты центра и радиус окружности *x* 2  2*x*  4 *y*  *y* 2  20  0.

1. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его малая полуось равна6, а фокусное расстояние равно 10.
2. Дан эллипс 25 *x* 2  49 *y* 2  1225 определите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.

1,11,21 4. Постройте гиперболу *x* 2  *y* 2  1 . Найдите асимптоты и эксцентриситет.

* 1. 36

1. Дано уравнение гиперболы 9*x* 2 16 *y* 2  144. Найдите координаты ее фокусов и

вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот. Сделайте чертеж.

|  |  |
| --- | --- |
| 6. | Вычислите угол между прямыми: *y* 2*x*  5 и *y*  3*x*  4 . |
| 7. | При каком значении *a* прямые *y*  *ax*  3 и *y* 3*x*  2 параллельны? |
| 8. | При каком значении *a* прямые *y*  *ax* 1 и y  5x  3 перпендикулярны? |

9. Найдите тангенс угла наклона прямой 2*x*  3 *y* 1  0 .

1.Найти координаты центра и радиус окружности *x* 2  6*x*  8 *y*  *y* 2  0.

1. Напишите каноническое уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках A1(-8;0) и А2(8;0), а фокусы имеют координаты (±5;0).
2. Дан эллипс 9 *x* 2  16 *y* 2  144. определите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.
3. Постройте гиперболу *x* 2  *y* 2  1. Найдите асимптоты и эксцентриситет.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,12,22 | 25 | 24 |  |  |  |  |  |  |
| Дано уравнение гиперболы 25*x* 2  9 *y* 2 | |  225. Найдите координаты ее фокусов и | | | | |  |
| 5. |  |
| вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот. Сделайте чертеж. | | | | | | | |  |
|  | Вычислите угол между прямыми: *y*  | |  | *x* 7и | *y*  |  | *x* 2 . |  |
| 6. | 3 | 3 |  |
| 7. | Параллельны ли прямые y-2x-3=0 и 8x-4y+5=0? | | | |  |  |  |  |
| 8. | При каком значении *a* прямые 2 *y*  *ax*  6 и *y*  5*x*  3 перпендикулярны? | | | | | | |  |
| 9. | Найдите тангенс угла наклона прямой, проходящей через точку D(-1;-3) и начало | | | | | | |  |
| координат. | |  |  |  |  |  |  |  |
| 1.Найти координаты центра и радиус окружности *x* 2 | | | | |  4*x*  6 *y*  *y* 2  3  0. | | |  |



1. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна12, а фокусы имеют координаты (±3;0).
2. Дан эллипс 9 *x* 2  36 *y* 2  324. Определите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.
3. Постройте гиперболу *x* 2  *y* 2  1. Найдите асимптоты и эксцентриситет.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,13,23 | 9 | 25 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5. Дано уравнение гиперболы 24*x* 2  25 *y* 2 | | |  600. Найдите координаты ее фокусов и | | | | | | | |  |
|  |  |
|  | вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот. Сделайте чертеж. | | | | | | | | | | |  |
|  | 6. Вычислите угол между прямыми: *y*  | | 2 | | *x*  | 1 | и *y*  | 1 | *x*  | 5 | . |  |
|  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 3 | 6 | | 3 | | 3 | |  |  |

1. Параллельны ли прямые 3x-5y=0 и 6x+10y+5=0?
2. Перпендикулярны ли прямые 3x-y-3=0 и x+3y-17=0?
3. Найдите тангенс угла наклона прямой3*x*  *y*  4  0 .

1.Найти координаты центра и радиус окружности *x* 2 12 *y*  *y* 2 11  0.

1. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его малая полуось равна 6, а фокусы имеют координаты (0; ±4).
2. Дан эллипс 16 *x* 2  64 *y* 2  1024. определите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4. | Постройте гиперболу | *x* 2 |  | *y* 2 |  1. Найдите асимптоты и эксцентриситет. | | |  |
|  |  |  |
|  | 144 | | 25 | |  |  |  |  |
| 4,14,24 5. Дано уравнение гиперболы 25*x* 2 169 *y* 2  4225. Найдите координаты ее фокусов | | | | | | | |  |
| и вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот. Сделайте чертеж. | | | | | | | |  |
| 6. | Вычислите угол между прямыми: *y*  *x*  4 и *y*  | | | | | 1 | *x* 2 . |  |
|  |  |
|  |  |  |  |  | 3 | |  |  |
| 7. | При каком значении *a* прямые *y*  *ax*  4 и *y*  1,5*x*  2,5 параллельны? | | | | | | |  |

1. Перпендикулярны ли прямые 2x+5y-6=0 и 5x+2y-3=0?
2. Найдите тангенс угла наклона прямой, проходящей через точку A(1;3) и начало координат.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5,15,25 | 1.Найти координаты центра и радиус окружности x 2 | |  6x 10y  y 2 13  0***.*** |  |  |
| 2. | Напишите каноническое уравнение эллипса, если даны его вершины (0;3) | | и (0;-3), |  |
|  |  |

а фокусное расстояние равно 8.

1. Дан эллипс 9x 2  49 y 2  441***.*** Определите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.
2. Постройте гиперболу x 2  y 2  1***.*** Найдите асимптоты и эксцентриситет.
   1. 64
3. Дано уравнение гиперболы 49x 2 16y 2  784***.*** Найдите координаты ее фокусов и

вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот.

6. Вычислите угол между прямыми: 7x+4y+9=0 и x-8y+27=0.

7. При каком значении *a* прямые *y*  *ax*  3 и *x*  5 *y*  9  0 параллельны?

8. При каком значении *a* прямые *y*  *ax* 1 и 2*x*  3 *y* 1  0 перпендикулярны?

9. Найдите тангенс угла наклона прямой *y*  1 *x*  2 . 3

1.Найти координаты центра и радиус окружности x 2 12y  y 2 13  0***.***

1. Напишите каноническое уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках (0;-8) и (0;8), а фокусы имеют координаты (±5;0).
2. Дан эллипс 49x 2  36 y 2  1764***.*** Определите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.
3. Постройте гиперболу x 2  y 2  1***.*** Найдите асимптоты и эксцентриситет.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6,16,26 | 24 | 25 |  |  |  |  |
| Дано уравнение гиперболы 25x 2 | |  36y 2 |  900***.*** | Найдите координаты ее фокусов и |  |
| 5. |  |

вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот.

1. Вычислите угол между прямыми: x-8y+27=0 и 2x-y-6=0.
2. Параллельны ли прямые 3*x*  *y*  4  0 и 8x-4y+5=0?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 8. | При каком значении *a* прямые 2 *y*  *ax*  6 и *x*  5 *y*  9  0 перпендикулярны? | | | | | |  |
|  | 9. | Найдите тангенс угла наклона прямой, проходящей через точку | | | | | *C* 2;1 2и |  |
|  | начало координат. | | |  |  |  |  |  |
|  | 1.Найти координаты центра и радиус окружности 9x 2  42x  54y  9y 2 | | | | | |  95  0***.*** |  |
|  | 2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 14, а | | | | | | |  |
|  | малая равна 6. | | |  |  |  |  |  |
|  | 3. | Дан эллипс 49x 2  25y 2 | |  1225***.*** Определите длины осей, координаты фокусов и | | | |  |
|  | эксцентриситет. | | |  |  |  |  |  |
|  | 4. | Постройте гиперболу | x 2 |  | y 2 |  1***.*** Найдите асимптоты и эксцентриситет. | |  |
| 7,17,27 |  |  |  |
|  | 64 | | 16 | |  |  |  |
|  | 5. Дано уравнение гиперболы 144x 2 16y 2  2304***.*** Найдите координаты ее фокусов | | | | | | |  |
|  | и вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот. | | | | | |  |  |

1. Вычислите угол между прямыми: 7x+4y+9=0 и 2x-y-6=0.
2. При каком значении *a* прямые *y*  *ax*  3 и x-8y+27=0 параллельны?
3. При каком значении *a* прямые *y*  *ax* 1 и 2x-y-6=0 перпендикулярны?
4. Найдите тангенс угла наклона прямой 3x-6y-12=0.

1.Найти координаты центра и радиус окружности x 2  4x  6y  y 2 12  0***.***

2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если две его вершины находятся в 8,18,28 точках A1(-7:0) и А2(7;0), а фокусы имеют координаты (±5;0).

3. Дан эллипс 16x 2  9y 2  144***.*** Определите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.

4. Постройте гиперболу x 2  y 2  1***.*** Найдите асимптоты и эксцентриситет.

* 1. 25

1. Дано уравнение гиперболы 25x 2 144y 2  3600***.*** Найдите координаты ее фокусов

и вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот.

1. Вычислите угол между прямыми: 4x+6y-3=0 и 2x-5y-10=0.
2. Параллельны ли прямые y-2x-3=0 и 3*x*  *y*  4  0 ?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 8. | При каком значении *a* прямые 2 *y*  *ax*  6 и *x*  5 *y*  9  0 перпендикулярны? | | | | | |  |
|  | 9. | Найдите тангенс угла наклона прямой3*x*  *y*  4  0 , проходящей через точку | | | | | |  |
|  | B(6;1) и начало координат. | | |  |  |  |  |  |
|  | 1.Найти координаты центра и радиус окружности x 2  2x  y 2  3  0***.*** | | | | | | |  |
|  | 2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 14, а | | | | | | |  |
|  | фокусы имеют координаты (±3;0). | | | | | | |  |
|  | 3. | Дан эллипс 9x 2  81y 2 | |  729***.*** Определите длины осей, координаты фокусов и | | | |  |
|  | эксцентриситет. | | |  |  |  |  |  |
| 9,19,29 | 4. | Постройте гиперболу | x 2 |  |  | y 2 |  1***.*** Найдите асимптоты и эксцентриситет. |  |
|  |  |  |  |
|  | 36 | | 25 | | |  |  |
|  |  |  |  |
|  | 5. Дано уравнение гиперболы 16x 2  25y 2  400***.*** Найдите координаты ее фокусов и | | | | | | |  |

вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот.

1. Вычислите угол между прямыми: 2x-5y-10=0 и 3x+2y+6=0.
2. Параллельны ли прямые 3x-6y-12=0 и - 2x  4y  5  0 ?
3. Перпендикулярны ли прямые 3x-y-3=0 и 6x+18y+5=0?

9.Найдите тангенс угла наклона прямой 7x+4y+9=0.

1.Найти координаты центра и радиус окружности x 2 10y  y 2  9  0***.***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2. | Напишите каноническое уравнение эллипса, если его малая полуось равна 6, а | | | | |  |
| фокусы имеют координаты (±4;0). | | | | | |  |
| 3. | Дан эллипс 24x 2  49 y 2 | |  1176***.*** Определите длины осей, координаты фокусов и | | |  |
| эксцентриситет. | | |  |  |  |  |
| 4. Постройте гиперболу | | x 2 |  | y 2 |  1***.*** Найдите асимптоты и эксцентриситет. |  |
|  |  |  |
|  | 81 | | 25 | |  |  |
| 5. Дано уравнение гиперболы 9x 2 169y 2  1521***.*** Найдите координаты ее фокусов и | | | | | |  |

вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот.

6. Вычислите угол между прямыми: 2x-5y-10=0 и 5x+6y+6=0.

7. При каком значении *a* прямые *y*  *ax*  4 и *x*  5 *y*  9  0 параллельны?

1. Перпендикулярны ли прямые x+5y-6=0 и -10x+2y-3=0?
2. Найдите тангенс угла наклона прямой 4x+6y-3=0.

**Задания для совместной работы.**

1. Проверьте принадлежат ли точки А (3; 14), В(4; 13), С(-3;0), Д(0; 5) прямой 7x-3y+21=0.
2. Постройте прямые: 1) x = 5; x = -3, x=0; 2) y = 4, y = -2, y = 0.
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М (2; -4) и перпендикулярной вектору = (4; 2).
4. Вычислите длину отрезка прямой 3x + 4y – 24 = 0, заключенного между осями координат.
5. На прямой 2x + y – 6 = 0 найдите точку М, равноудаленную от точек А(3; 5) и В(2; 6).
6. Вычислите углы наклона к оси Ох для прямых: 1) у = х; 2) у = -х.
7. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат, если её угловой коэффициент: 1) k = 6; 2) k =-2.
8. Найдите острый угол между прямыми 5х – 2у -16 = 0 и 3х+4у – 12 = 0.
9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М (-2; -4) параллельно прямой 2х -3у + 16 = 0.
10. Проверьте, перпендикулярны ли следующие прямые:

1) 3х – 4у + 12 = 0 и 4х+ 3у – 6 = 0;

2) 4х + 4у – 8 = 0 и 3х – 2у + 4 = 0.

1. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки А (3; 1), В (-2; 6), С (-5; -2).
2. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках (-8; 0) и (8; 0), а фокусы - в точках (0; -6) и (0; 6).
3. Составьте уравнение гиперболы, если её вершины находятся в точках (-3; 0) и (3; 0), фокусы – в точках (-5; 0) и (5; 0).
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если её директрисой служит прямая х = -3.

**Самостоятельная работа №4 .**

**Вариант – 1.**

1. В треугольнике АВС, ВМ – медиана, А(-1; 2; 2), В(2; -2; -1).

Найти: а) координаты точки С; б) длину стороны ВС.

1. Вычислить угол между прямыми АВ и СD, если А (; 1; 0), В(0; 0; 2), С(0; 2; 0), D(; 1; 2).
2. Составьте уравнение окружности с центром в точке (-3; 0) и проходящей через

точку (2; 4).

1. Составьте уравнение гиперболы, если её вершины находятся в точках (-3; 0) и (3; 0), а фокусы – в точках (-3; 0) и (3; 0).
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М (-2; 3; 4) и параллельной плоскости x +2y -3z + 4= 0.

**Вариант – 2.**

1. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке О, А (1; 3; -1), В (-2; 1; 0), О (0; 1,5; 0). Найдите: а) координаты точки С; б) длину стороны ВС.
2. Вычислить угол между прямыми АВ и СD, если А (6; -4; 8), В (8; -2;4), С (12; -6; 4), D(14; -6; 2).
3. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках (0; -8) и (0; 8), а фокусы - в точках (-5; 0) и (5; 0).
4. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси ОХ, если её действительная ось равна 26, а мнимая ось равна 42.
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку М (2; 1; 3) и параллельной вектору

**Вариант – 3.**

1. В треугольнике АВС, ВМ – медиана, А (-2; 4; 4), В (4; -4; -12), М (2; 2; -2). Найти: а) координаты точки С; б) длину стороны ВС.
2. Вычислить угол между прямыми ВА и ВС, если А (-1; 4; 1), В (3; 4; -2), С (5; 2; -1).
3. Составьте уравнение окружности с центром в точке (5; -7) и проходящей через точку (2; -3).
4. Составьте уравнение гиперболы, если её вершины находятся в точках (-3; 0) и (3; 0), а фокусы – в точках (-5; 0) и (5; 0).
5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М (2; 2; -2) и параллельной плоскости x +2y -3z = 0.

**Вариант – 4.**

1. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке О, А (2; 6; -2), В (-4; 2; 0), О(0; 3; 0). Найдите: а) координаты точки С; б) длину стороны ВС.
2. Вычислить угол между прямыми АВ и СD, если А (3; -2; 4), В (4; -1;2), С(16; -3; 2), D(17; -3; 1).
3. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках (0; -6) и (0; 6), а фокусы - в точках (-3; 0) и (3; 0).
4. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси ОХ, если её действительная ось равна 24, а мнимая ось равна 40.
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку М (3; 2; 1) и параллельной вектору

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что называется, уравнением прямой?
2. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
3. Как записывается каноническое уравнение прямой?
4. Запишите уравнения осей координат.
5. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
6. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.
7. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
8. Сформулируйте условие параллельности прямых.
9. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
10. Как найти угол между прямыми?
11. Каким уравнением описывается кривая на плоскости?
12. Запишите каноническое уравнение эллипса.
13. Что называется, эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?
14. Чему равен эксцентриситет окружности?
15. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
16. Запишите уравнение равносторонней гиперболы.
17. Запишите каноническое уравнение параболы, директрисы параболы.

**Практическое занятие № 4.**

**Тема:** Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

**Цель:** отработка умений и навыков выполнения действий над комплексными

числами, заданными в тригонометрической и показательной формах.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах».

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №4.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

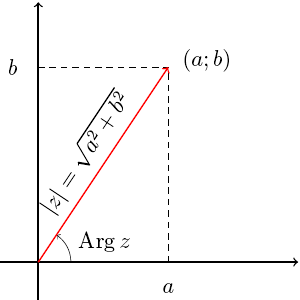
**по решению задач.**

*Комплексное число* — это выражение вида *a* + *bi*, где *a*, *b* — действительные числа, а *i* — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен –1, то есть *i*2 = –1. Число *a* называется *действительной частью*, а число *b* — *мнимой частью* комплексного числа *z* = *a* + *bi*. Если *b* = 0, то вместо *a* + 0*i* пишут просто *a*. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

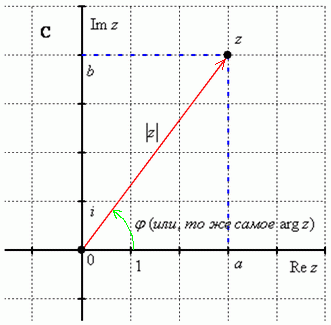
Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу (*a* + *bi*) ± (*c* + *di*) = (*a* ± *c*) + (*b* ± *d*)*i*, а умножение — по правилу (*a* + *bi*) · (*c* + *di*) = (*ac* – *bd*) + (*ad* + *bc*)*i* (здесь как раз используется, что *i*2 = –1). Число http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form1_12.gif = *a* – *bi* называется *комплексно-сопряженным* к *z* = *a* + *bi*. Равенство *z* · http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form1_12.gif = *a*2 + *b*2 позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form2_493.gif.

(Например, http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form3_138.gif.)

У комплексных чисел есть удобное и наглядное геометрическое представление: число *z* = *a* + *bi* можно изображать вектором с координатами (*a*; *b*) на декартовой плоскости (или, что почти то же самое, точкой — концом вектора с этими координатами). При этом сумма двух комплексных чисел изображается как сумма соответствующих векторов (которую можно найти по правилу параллелограмма). По теореме Пифагора длина вектора с координатами (*a*; *b*) равна http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form4_85.gif. Эта величина называется *модулем* комплексного числа *z* = *a* + *bi* и обозначается |*z*|. Угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси абсцисс (отсчитанный против часовой стрелки), называется *аргументом* комплексного числа *z* и обозначается Arg *z*. Аргумент определен не однозначно, а лишь с точностью до прибавления величины, кратной 2*π* радиан (или 360°, если считать в градусах) — ведь ясно, что поворот на такой угол вокруг начала координат не изменит вектор. Но если вектор длины *r* образует угол *φ* с положительным направлением оси абсцисс, то его координаты равны (*r* · cos *φ*; *r* · sin *φ*). Отсюда получается *тригонометрическая форма записи* комплексного числа: *z* = |*z*| · (cos(Arg *z*) + *i* sin(Arg *z*)). Часто бывает удобно записывать комплексные числа именно в такой форме, потому что это сильно упрощает выкладки. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме выглядит очень просто: *z*1 · *z*2 = |*z*1| · |*z*2| · (cos(Arg *z*1 + Arg *z*2) + *i* sin(Arg *z*1 + Arg *z*2)) (при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются). Отсюда следуют *формулы Муавра*: *zn* = |*z*|*n* · (cos(*n* · (Arg *z*)) + *i* sin(*n* · (Arg *z*))). С помощью этих формул легко научиться извлекать корни любой степени http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form5_14.gifиз комплексных чисел. *Корень n-й степени из числа z* — это такое комплексное число *w*, что *wn* = *z*. Видно, что http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form6_109.gif, а http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form7_216.gif, где *k* может принимать любое значение из множества {0, 1, ..., *n* – 1}. Это означает, что всегда есть ровно *n* корней *n*-й степени из комплексного числа (на плоскости они располагаются в вершинах правильного *n*-угольника).

Любое комплексное число (кроме нуля) http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image008_0002.gif можно записать в тригонометрической форме:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image145.gif, где http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image147.gif – это **модуль комплексного числа**, а http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image149.gif – **аргумент комплексного числа**.

Изобразим на комплексной плоскости число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image008_0003.gif. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image152.gif:   


**Модулем комплексного числа** http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0002.gif называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом.

Модуль комплексного числа http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0003.gif стандартно обозначают: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image147_0000.gif или http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image158.gif

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image160.gif. Данная формула справедлива **для любых** значений «а» и «бэ».

***Примечание****: модуль комплексного числа представляет собой обобщение понятия*[***модуля действительного числа***](http://www.mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf)*, как расстояния от точки до начала координат.*

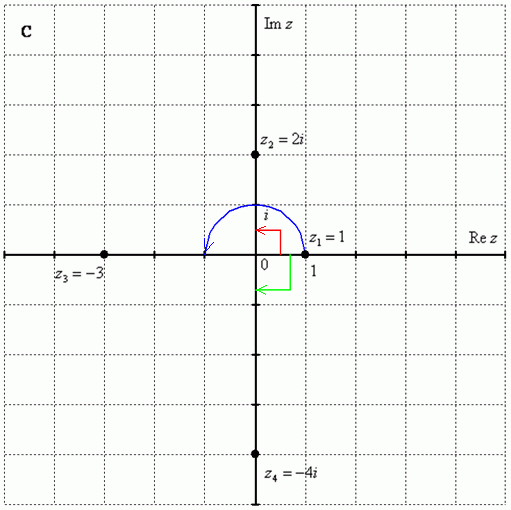
**Аргументом комплексного числа** http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0004.gif называется **угол** http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image149_0000.gif между положительной полуосью действительной оси http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image016_0003.gif и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image163.gif.

Аргумент комплексного числа http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0005.gif стандартно обозначают: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image149_0001.gif или http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image165.gif

Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image167.gif. **Внимание!** Данная формула работает только в правой полуплоскости! Если комплексное число располагается не в 1-ой и не 4-ой координатной четверти, то формула будет немного другой. Эти случаи мы тоже разберем.

Но сначала рассмотрим простейшие примеры, когда комплексные числа располагаются на координатных осях.

Пример 1.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image169.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image171.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image173.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image175.gif.  
Выполним чертёж:  


На самом деле задание устное. Для наглядности перепишу тригонометрическую форму комплексного числа: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image145_0000.gif

Запомним, модуль – **длина** (которая всегда неотрицательна), аргумент – **угол**.

1) Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image169_0000.gif. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image180.gif. Формальный расчет по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image182.gif.  
Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image184.gif (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image186.gif.

Ясно, обратное проверочное действие: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image188.gif

2) Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image171_0000.gif. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image191.gif. Формальный расчет по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image193.gif.  
Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image195.gif (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме:

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image199.gif

3) Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image173_0000.gif. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image202.gif. Формальный расчет по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image204.gif.  
Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image206.gif (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image208.gif.

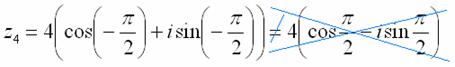
Проверка: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image210.gif

4) И четвёртый интересный случай. Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image175_0000.gif. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image213.gif. Формальный расчет по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image215.gif.

Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image217.gif (270 градусов), и, соответственно: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image219.gif. Проверка: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image221.gif

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией («прокруткой») угла: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image223.gif (минус 90 градусов), на чертеже угол отмечен зеленым цветом. Легко заметить, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image217_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image223_0000.gif – это один и тот же угол.

Таким образом, запись принимает вид: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image226.gif

**Внимание!** Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи:  


Пример 2.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: , http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image004_0000.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image008_0005.gif.

Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image004_0001.gif. Найдем его модуль и аргумент.  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image016_0004.gif  
Поскольку http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image018.gif (случай 2), то http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image020.gif – вот здесь нечетностью арктангенса воспользоваться нужно. К сожалению, в таблице отсутствует значение http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image022.gif, поэтому в подобных случаях аргумент приходится оставлять в громоздком виде:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image024.gif – число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image012_0002.gif в тригонометрической форме

Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image008_0006.gif. Найдем его модуль и аргумент.  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image030_0002.gif

Поскольку http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image032.gif (случай 1), то http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image034_0000.gif (минус 60 градусов).

Таким образом:   
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image036_0002.gif – число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image014_0003.gif в тригонометрической форме.

А вот здесь, как уже отмечалось, минусы не трогаем.

Используем *таблицу значений тригонометрических функций*, при этом учитываем, что угол http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image039.gif – это в точности табличный угол http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image041.gif (или 300 градусов):  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image043.gif – число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image014_0004.gif в исходной алгебраической форме.

Любое комплексное число (кроме нуля) http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image047.gif можно записать в показательной форме:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image049.gif, где http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image051.gif – это модуль комплексного числа, а http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image053.gif – аргумент комплексного числа.

Что нужно сделать, чтобы представить комплексное число в показательной форме? Почти то же самое: выполнить чертеж, найти модуль и аргумент. И записать число в виде http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image049_0000.gif.

Например, для числа http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image004_0002.gif предыдущего примера у нас найден модуль и аргумент: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image055.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image057.gif. Тогда данное число в показательной форме запишется следующим образом: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image059.gif.

Число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image061.gif в показательной форме будет выглядеть так: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image063.gif

Число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image065.gif – так: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image067.gif

 И т.д.

Единственный совет – **не трогаем показатель** экспоненты, там не нужно переставлять множители, раскрывать скобки и т.п. Комплексное число в показательной форме записывается **строго** по форме http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image049_0001.gif.

Пример 3.

Дано комплексное число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image087.gif, найти http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image089.gif.

Что нужно сделать? Сначала нужно представить данной число в тригонометрической форме.

http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image091.gif

Тогда, по формуле Муавра:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image093.gif

Не нужно считать на калькуляторе http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image095.gif, а вот угол в большинстве случае следует упростить. Как упростить? Образно говоря, нужно избавиться от лишних оборотов. Один оборот составляет http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image097.gif радиан или 360 градусов. Выясним сколько у нас оборотов в аргументе http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image099.gif. Для удобства делаем дробь правильной: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image101.gif, после чего становится хорошо видно, что можно убавить один оборот: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image103.gif. Понятно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image105.gif и http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image107.gif – это один и тот же угол.

Таким образом, окончательный ответ запишется так:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image109.gif.

Можно переписать ответ в виде:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image111.gif (т.е. убавить еще один оборот и получить значение аргумента в стандартном виде).

Хотя http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image109_0000.gif – ни в коем случае не ошибка.

Пример 4.

Дано комплексное число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image113.gif, найти http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image115.gif. Полученный аргумент (угол) упростить, результат представить в алгебраической форме.

Отдельная разновидность задачи возведения в степень – это возведение в степень чисто мнимых чисел.

Пример 5.

Возвести в степень комплексные числа http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image117.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image119.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image121.gif

Здесь тоже всё просто, главное, помнить знаменитое равенство.

Если мнимая единица возводится в четную степень, то техника решения такова:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image123.gif

Если мнимая единица возводится в нечетную степень, то «отщипываем» одно «и»,  получая четную степень:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image125.gif

Если есть минус (или любой действительный коэффициент), то его необходимо предварительно отделить:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image127.gif

**Извлечение корней из комплексных чисел.  
Квадратное уравнение с комплексными корнями.**

Пример 6.

Решить квадратное уравнение http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image157.gif

Вычислим дискриминант:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image159.gif

Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image161.gif

По известным школьным формулам получаем два корня:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image163_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image165_0000.gif – сопряженные комплексные корни

Таким образом, уравнение http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image157_0000.gif имеет два сопряженных комплексных корня: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image167_0001.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image169_0001.gif

Теперь вы сможете решить любое квадратное уравнение!

И вообще, любое уравнение с многочленом «энной» степени http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image171_0001.gif имеет ровно http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image083_0000.gif корней, часть из которых может быть комплексными.

Простой пример для самостоятельного решения:

Пример 7.

Найти корни уравнения http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image174.gif и разложить квадратный двучлен на множители.

Разложение на множители осуществляется опять же по стандартной школьной формуле.

**Как извлечь корень из произвольного комплексного числа?**

Рассмотрим уравнение http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image176.gif, или, то же самое: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image178.gif. Здесь «эн» может принимать любое натуральное значение, которое больше единицы. В частности, при http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image180_0000.gif получается квадратный корень http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image182_0000.gif

Уравнение вида http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image178_0000.gif имеет ровно http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image083_0001.gif корней http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image186_0000.gif, которые можно найти по формуле:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image188_0000.gif, где http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image190.gif – это модуль комплексного числа http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image192.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image053_0000.gif – его аргумент, а параметр http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image195_0000.gif принимает значения: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image197_0000.gif

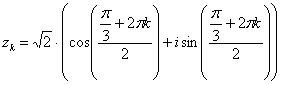
Пример 8.

Найти корни уравнения http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image199_0000.gif

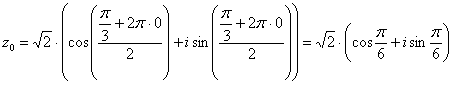
Перепишем уравнение в виде http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image201.gif

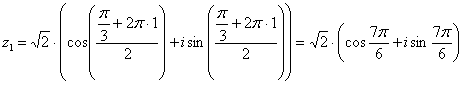
В данном примере http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image203.gif,  http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image180_0001.gif, поэтому уравнение будет иметь два корня: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image206_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image208_0000.gif.  
Общую формулу можно сразу немножко детализировать:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image210_0000.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image212.gif

Теперь нужно найти модуль и аргумент комплексного числа http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image203_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image214.gif  
Число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image192_0000.gif располагается в первой четверти, поэтому:  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image217_0001.gif  
Напоминаю, что при нахождении тригонометрической формы комплексного числа всегда желательно сделать чертеж.

Еще более детализируем формулу:  
, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image212_0000.gif

На чистовик так подробно оформлять, конечно, не нужно, это сделано мной для того, чтобы вам было понятно, откуда что взялось.

Подставляя в формулу значение http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image221_0000.gif, получаем первый корень:  


Подставляя в формулу значение http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image225.gif, получаем второй корень:  


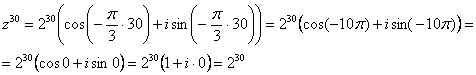
**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image229.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image231.gif

При желании или требовании задания, полученные корни можно перевести обратно в алгебраическую форму.

*Пример 9:* ***Решение:***  
*http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image299.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image301.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image303.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image305.gif*

*Пример 10:* ***Решение:***  
*Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image002_0005.gif. Найдем его модуль и аргумент. http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image307.gif. Поскольку http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image032_0000.gif (случай 1), то http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image309.gif. Таким образом: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image311.gif – число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image208_0003.gif в тригонометрической форме.*

*Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0008.gif. Найдем его модуль и аргумент. http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image314.gif. Поскольку http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image316.gif (случай 3), то http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image318.gif. Таким образом: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image320.gif – число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image322.gif в тригонометрической форме.*

*Пример 11:* ***Решение:*** *Представим число в тригонометрической форме: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image324.gif. Используем формулу Муавра http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image085_0000.gif:*   
**

*Пример 12:* ***Решение:***  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image329.gif  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image331.gif

*Пример 13:* ***Решение:***  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image333.gif  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image335.gif  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image337.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image339.gif  
*Разложим квадратный двучлен на множители:*  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image341.gif

**Самостоятельная работа №4.**

**Вариант – 1.**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а)

б)

1. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а)+i

б) +i

1. Даны комплексные числа и (

Найти: а) б) ; в) .

**Вариант – 2.**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а)

б)

1. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) +i

б) +i

1. Даны комплексные числа и (

Найти: а) б) ; в) .

**Вариант – 3.**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а)

б)

1. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) +i

б) +i

1. Даны комплексные числа и (

Найти: а) б) ; в) .

**Вариант – 4.**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а)

б)

1. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) +i

б) +i

1. Даны комплексные числа и (

Найти: а) б) ; в) .

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?

Как записывается комплексное число в показательной форме? Формула Эйлера.

1. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно.
2. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратно.
3. Как перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной и обратно.
4. Как умножаются комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.
5. Как умножаются комплексные числа, записанные в показательной форме?
6. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
7. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в показательной форме.
8. Как возвести в степень комплексное число, записанное в тригонометрической форме.
9. Как возвести в степень комплексное число, записанное в показательной форме?
10. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.
11. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в показательной форме.
12. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

**Практическое занятие № 5.**

**Тема**: **Вычисление пределов последовательностей. Вычисление пределов функций.**

**Цель**: Проверить на практике знание понятия предела последовательности, умение находить предел последовательности и предел функции с помощью раскрытия неопределённостей. Закрепить навык вычисления пределов последовательности и пределов функций.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Вычисление пределов последовательностей. Вычисление пределов функций..»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №5.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретический материал и примеры на вычисление пределов последовательностей и вычисление пределов функций.**

**Числовые последовательности**

Определение. Если каждому n из множества натурального ряда чисел поставлено в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число *x*n, то множество чисел *x*1,*x*2,*x*3,….,*x*n,…. называется числовой последовательностью и обозначается {*x*n}, при этом *x*n называется общим членом числовой последовательности. Числа *x*n называются элементами или членами числовой последовательности.

Например, последовательность с общим членом *x*n=, будет последовательностью чисел 1,,,…..,=.

Последовательность с общим членом *x*n=1+(-1)n  будет последовательностью чисел 

Арифметическая и геометрическая прогрессия также являются числовыми последовательностями.

**Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности**

Числовые последовательности бывают бесконечно большими и бесконечно малыми.

Определение. Последовательность {*xn*} называется бесконечно большой, если для любого положительного числа *А*, сколь угодно большого, можно указать номер *N* такой, что при *n* *N* все элементы последовательности *xn* удовлетворяют неравенству



Например, последовательность натурального ряда чисел 1, 2, …, n, … является бесконечно большой, т.к, какое ни возьми число *N*, начиная с которого, для n*N*, члены последовательности будут всё-таки больше *А.*

Последовательность 1, 2, 1, 3, 1, 4, …, 1, n, … не является бесконечно большой, так как для всех нечетных членов этой последовательности неравенство  не будет выполняться.

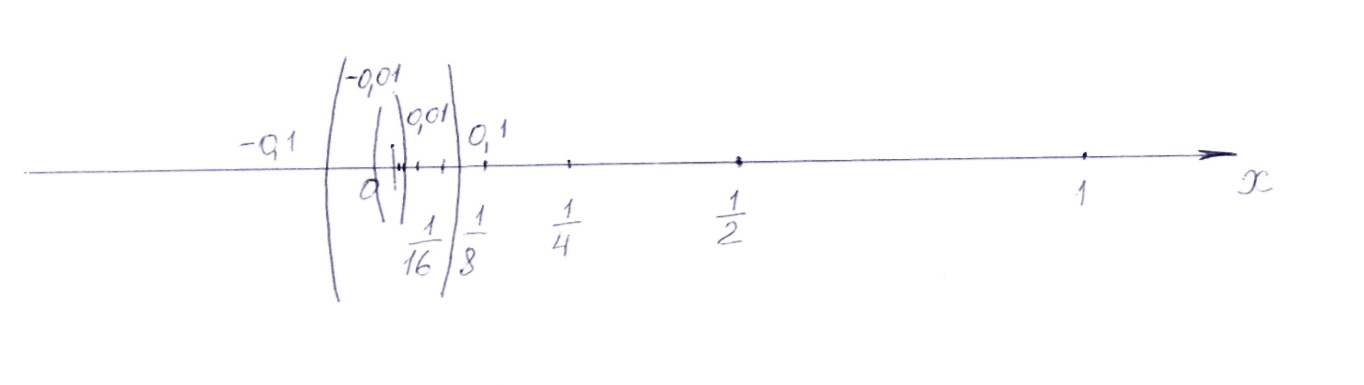
Определение 1.1.3. Последовательность {*n*} называется бесконечно малой, если для любого положительного числа**, сколь угодно малого, можно указать номер *N* такой, что при n*N* все элементы .

Например, геометрическая прогрессия, у которой знаменатель , является бесконечно малой числовой последовательностью.

Рассмотрим геометрическую прогрессию с общим членом

 1, 

Изобразим точками на числовой оси элементы этой последовательности (см.рис.1.1.)

Рис.1.1. Числовая последовательность с общим членом 

Выберем сколь угодно малое число *,* например, **=0,1. Начиная с номера *N* =5, для всех членов последовательности справедливо неравенство *xn*<*0,1*. Если выбрать **=0,01, то, начиная с номера *N* =8, для всех членов последовательности справедливо *xn<0,01*.

Если в неравенстве<**раскрыть модульные скобки, то (-**<<**) показывает, что начиная с номера *N*, зависящего от **, все члены последовательности попадают на интервал (-**;**). Для рассмотренного примера, при **=0,1, начиная с *N* =5 члены последовательности попадают на интервал(-0,1;0,1); при **=0,01 на интервал(-0,01;0,01). Чем меньше **, тем больше номер *N*. Все члены последовательности приближаются к нулю, но ни при одном *n*, не обращаются в нуль.

Рассмотрим пример последовательности с общим членом *xn=(-1),*

1,

Изобразим точками на числовой оси элементы этой последовательности (см. рис.1.2)

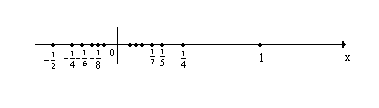


Рис.1.2. Числовая последовательность с общим членом *xn=(-1)*

Видно, что члены последовательности приближаются к нулю, при этом ни один элемент последовательности не равен нулю. Для любого, сколь угодно малого, **>0, можно указать номер *N*, начиная с которого для всех *nN*, справедливо неравенство <**.

**=0,1, номер *N* =11

**=0,01, номер *N* =101 и т.д.

Значит, последовательность также является бесконечно малой.

**Определение предела.** Число *b* – предел функции *f(x)* при *x* стремящемся к *a*, если для каждого положительного числа можно указать такое положительной число , что для всех *x*, отличных от *a* и удовлетворяющих неравенству |*x-a*|<, имеет место неравенство |f(x)-b|<

**Обозначение предела.** Если *b* есть предел функции *f(x)* при *x* стремящемся к *a*, то записывают это так:



**Определение непрерывной функции.** Функция *f(x)* непрерывна в точке *a*, если



Вычисление пределов функций основано на применении следующих основных теорем:

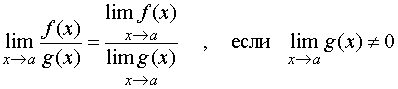
**ТЕОРЕМА 1.** Предел суммы двух функций при *x* стремящемся к *a* равен сумме пределов этих функций, то есть



**ТЕОРЕМА 2.** Предел произведения двух функций при *x* стремящемся к *a* равен произведению пределов этих функций, то есть



**ТЕОРЕМА 3.** Предел частного двух функций при *x* стремящемся к *a* равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть



и равен плюс (минус) бесконечности, если предел знаменателя 0, а предел числителя конечен и отличен от нуля.

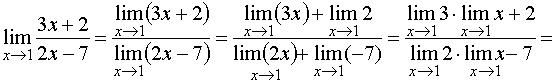
ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСЛОЖНЫХ ПРЕДЕЛОВ

**Пример 1.**



*Комментарий*. Здесь была использована [теорема о пределе суммы](http://repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема1#Теорема1).

**Пример 2.**



*Комментарий*. На первом шаге была применена [теорема о пределе частного](http://repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема3#Теорема3), так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась [теорема о пределе суммы](http://repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема1#Теорема1) для числителя и знаменателя дроби. После была применена [теорема о пределе произведения](http://repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема2#Теорема2).

**Пример 3.** Найти предел



Знаменатель и числитель дроби при *x* стремящемся к 2 стремятся к нулю, поэтому [теорема о пределе частного](http://repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема3#Теорема3) здесь неприменима. В таких случаях нужно попытаться упростить дробь. Имеем

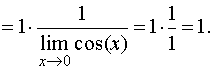


Это преобразование справедливо при всех значениях *x*, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ПЕРВОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

**Пример 1.**





***Пример..*** Найти пределы:

а)  б) ,

в) 

Решение.

а) 

б),

в) .

Следует отметить, что формулы (1.5) и (1.6) справедливы не только для многочленов целой степени, но и для многочленов дробной степени, так как  для любого *a*>0.

***Пример .***  Найти пределы.

а) ,

б) ,

в) ,



Решение:

а) В числителе три слагаемых соответственно степени:  Следовательно, степень числителя равна , а главный член в числителе равен . Аналогично, главный член в знаменателе  Имеем по формулам (1.5) и (1.6):

а) 

б) 

в) 

т.к. 

Здесь также можно было использовать идею, что главный член это старший член. Имеем:



***Пример 1.4.*** **(Неопределенности )**

а) , б) 

Решение*.* Для избавления от неопределенности  здесь следует избавиться от иррациональности в числителе, умножив и разделив данное выражение на соответствующее сопряженное выражение.

а) Используем формулу



Для данного примера



Имеем:

а)



б) Напоминаем, что  и при  .

Имеем:

=.

**ΙΙ замечательный предел**

****

Действительно, 

Если , то  при ,тогда справедливо



Докажем, что, при действительном *к*.

, где *t=kx*, при , .

Очень часто ΙΙ замечательный предел записывают в логарифмической форме. Для этого прологарифмируем равенство по основанию «е»:



или  – логарифмическая форма записи.

Отсюда видно, что *ln(1+x)~x.*

Рассмотримпримеры:

1. ~

2. ~

3. .

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что называется числовой последовательностью?

2. Что называется общим членом числовой последовательности?

3. Какие числа называются членами числовой последовательности?

4. Какая последовательность называется бесконечно малой?

5. Какая последовательность называется бесконечно большой?

6. Дайте определение предела функции.

7. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

8. Сформулируйте правила раскрытия неопределенностей при вычислении пределов.

9. Дайте определение первому замечательному пределу?

10. Дайте определение первому замечательному пределу?

11. Где применяется пределы?

12. Запишите второй замечательный предел в логарифмической форме.

**Самостоятельная работа №5.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант 1 | | | | |
| 1. | | 4. | | |
| 2. | | 5. | | |
| 3. | | 6. | | |
| Вариант 2 | | | | |
| 1. | | 4. | | |
| 2. | | 5. | | |
| 3. | | 6. | | |
| Вариант 3 | | |
| 1. | | 4. |
| 2. | | 5. |
| 3. | | 6. |
| Вариант 4 | | |
| 1. | | 4. |
| 2. | | 5. |
| 3. | | 6. |
| Вариант 5 | | |
| 1. | | 4. |
| 2. | | 5. |
| 3. | | 6. |
| Вариант 6 | | |
| 1. | | 4. |
| 2. | | 5. |
| 3. | | 6. |
| Вариант 7 | | |
| 1. | | 4. |
| 2. | | 5. |
| 3. | | 6. |
| Вариант 8 | | |
| 1. | | 4. |
| 2. | | 5. |
| 3. | | 6. |
| Вариант 9 | | |
| 1. | | 4. |
| 2. | | 5. |
| 3. | | 6. |
| Вариант 10 | | |
| 1. | | 4. |
| 2. | | 5. |
| 3. | | 6. |

**Практическое занятие № 6.**

**Тема**: **Нахождение производных элементарных и сложных функций. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков.**

**Цель**: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная функция. Закрепить навык нахождения производной и дифференциалов высшего порядка.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Нахождение производных элементарных и сложных функций. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №5.

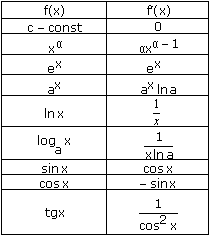
**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретический материал и примеры нахождения производной элементарных функций, сложной функции, производных и дифференциалов высших порядков**

**Определение:** Производной функции f(x) (f'(x0)) в точке x0  называется число, к которому стремится разностное отношение , стремящемся к нулю.

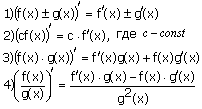


**Производные элементарных функций.**



**Правила дифференцирования.**

Если у функций  f(x) и  g(x) существуют производные, то



**Производная сложной функции**

Теперь можно установить важное в практических приложениях правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих ее функций.

**Теорема 7.3.1.** Пусть задана сложная функция ;функция имеет производную в точке , а функция имеет производную в точке .Тогда функция имеет производную в точке и



**Доказательство.** Так как функция дифференцируема в точке , то



где при . Если положить , то функция непрерывна в точке .



Придадим переменной в точке малое приращение ; оно влечет приращение зависимой переменной : . Итак,



Разделив на , получим



Так как существует , то функция непрерывна в точке и, следовательно, при и так как , то функция непрерывна в точке . Отсюда сложная функция, как суперпозиция непрерывных функций , непрерывна в точке .



Теперь, переходя к пределу в (7.3.1) при , получим



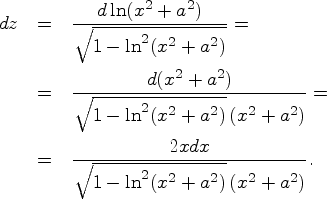
**Пример.**



Тогда



**Пример.** Найдем дифференциал функции :



## Производные высших порядков

Если функция дифференцируема при всех , то мы можем рассмотреть функцию , сопоставляющую каждой точке значение производной . Эта функция называется производной функции , или первой производной от . (Иногда саму исходную функцию называют нулевой производной и обозначают тогда .) Функция , в свою очередь, может иметь производную во всех (или некоторых) точках интервала , которую мы обозначим и назовём второй производной функции . Если предположить, что вторая производная существует во всех точках , то она может также иметь производную , называемую третьей производной функции , и т. д. Вообще, -й производной функции называется производная от предыдущей, -й производной :



если эта производная существует. -я производная называется также производной -го порядка, а её номер называется порядком производной.



При первую, вторую и третью производные принято обозначать штрихами: или ; при прочих  -- числом в скобках в верхнем индексе: или .



Физический смысл производной второго порядка проясняется из того, что если первая производная задаёт мгновенную скорость изменения значений в момент времени , то вторая производная, то есть производная от , задаёт мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, то есть ускорение значений . Следовательно, третья производная -- это скорость изменения ускорения (или, что то же самое, ускорение изменения скорости, поскольку, как очевидно следует из определения, ).



**Пример 1.**   Найдём вторую производную функции . Первая производная равна



далее находим



**Пример 2.**   Пусть . Тогда



При все производные оказываются равными исходной функции:



**Пример 3.**   Рассмотрим функцию . Тогда



Поскольку четвёртая производная совпала с исходной функцией , то далее значения производных начнут повторяться с шагом 4: при получаем



Заметим также, что

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Легко видеть, что имеет место общая формула:



## Дифференциалы высших порядков.

Напомним, что дифференциал функции (называемый также первым дифференциалом, или дифференциалом первого порядка) задаётся формулой



Рассмотрим это выражение (при фиксированном приращении аргумента ) как функцию переменного и найдём её дифференциал :



Этот дифференциал от первого дифференциала называется вторым дифференциалом от функции , или дифференциалом второго порядка. Аналогично, дифференциал от второго дифференциала называется третьим дифференциалом; он задаётся формулой



Вообще, -й дифференциал , или дифференциал -го порядка, определяется как дифференциал от -го дифференциала (при постоянном приращении ); для него имеет место формула:



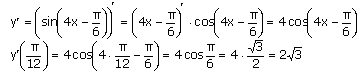
**Примеры.**

1. Найти значение производной функции



**Решение.**

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:



**Ответ:**.



Примеры.

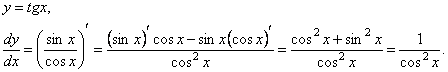
1. Если , то



1. *y* = *x*3 – 3*x*2 + 5*x* + 2. Найдем *y* '(–1).

*y* ' = 3*x*2 – 6*x*+ 5. Следовательно, *y* '(–1) = 14.

1. *y* = ln *x* · cos *x*, то *y* ' = (ln *x*) ' cos *x* + ln *x* (cos *x*) ' =1/*x*∙cos *x* – ln *x* · sin *x.*



**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.
8. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
9. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
10. В чем заключается механический смысл производной?
11. Что называется производной второго порядка и, каков ее механический смысл?
12. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?

**Самостоятельная работа №6.**

**Вариант – 1.**

1. Найдите производную следующих функций:

а)

б)

в)

г)

д) ;

е)

ж)

з)

1. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) ;

б)

в)

**Вариант – 2.**

1. Найдите производную следующих функций:

а)

б) ;

в)

г)

д) ;

е)

ж)

з)

1. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

a)

б)

в)

**Вариант – 3.**

1. Найдите производную следующих функций:

а)

б)

в)

г)

д) ;

е)

ж)

з) )

1. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а)

б) ;

в)

**Вариант – 4.**

1. Найдите производную следующих функций:

а)

б) ;

в)

г)

д) ;

е)

ж)

з)

1. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) ;

б) ;

в) .

**Практическое занятие № 7.**

**Тема: Исследование функций и построение их графиков.**

**Цель**: Проверить на практике умение находить промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы, промежутки выпуклости, точки перегиба, асимптоты функции, применять полученные знания при построении графика функции и исследовании функции по общей схеме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Исследование функций и построение их графиков.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №6.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретический материал и примеры применения производной к исследованию функции.**

## Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Находят область определения функции;
2. Проверяют функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Находят точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение , ось ОУ имеет уравнение );
4. Находят асимптоты графика функции;
5. Исследуют функцию на монотонность и находят точки экстремума;
6. Находят интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
7. Строят график.

Для применения данной схемы, вспомним некоторые основные понятия и определения. Прямая называется ***наклонной асимптотой*** для графика функции , если  (1)

Числа *k*  и *b* в уравнении асимптоты находятся из условий:

 (2)

Если  , то прямая *у=b* называется ***горизонтальной асимптотой***.

Прямая *х =а* называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции , если

.

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции  в качестве точки *а*, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

***Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:***

1. Найти область определения функции.

2. Вычислить производную функции ;

3. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых  или не существует;

4. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;

5. Если в рассматриваемом интервале

, то на этом интервале функция убывает;

, то на этом интервале функция возрастает.

6. Если  - критическая точка и при переходе через нее  меняет знак с «+» на « - », то  - точка максимума; если же она меняет знак с « - » на «+», то  - точка минимума.

***Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:***

1. Вычислить вторую производную функции ;
2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых  или не существует;
3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;
4. Если в рассматриваемом интервале

, то на этом интервале график функции выпуклый вверх;

, то на этом интервале график функции выпуклый вниз;

1. Если  - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее  меняет знак, то  - точка перегиба.

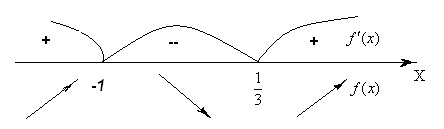
Пример 1: Исследовать функцию и построить ее график.

Решение: исследуем функцию по схеме:

1. D(y)=R;
2.  - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (ОХ): . Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: .

Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если , то ;

1. Асимптот нет;
2. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: . Найдем критические точки функции: . Получим: . Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



Из чертежа имеем, что функция возрастает на , убывает на . Найдем экстремумы функции:

. Значит, точка максимума имеет координаты 

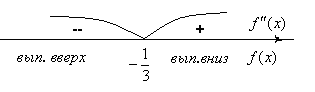
. Значит, точка минимума имеет координаты 

1. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую

производную: . Найдем критические точки 2 рода функции:

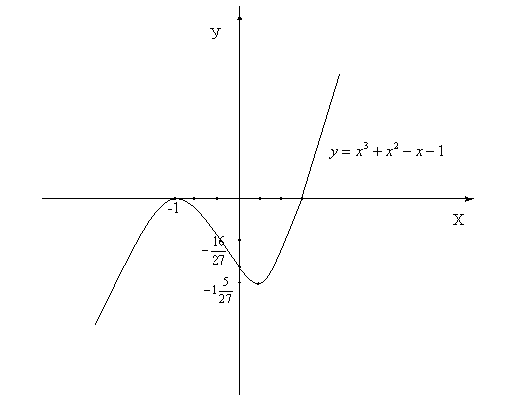
. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения

19



Значит, график функции будет выпуклым вверх на и выпуклым вниз на . Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: . Значит, точка перегиба .

1. Построим график:



*Пример 2.* Построить график функции у = 

Решение:

1. Найдем область определения функции. Она задается условиями x ≠ 1, x ≠ -1 (при значениях x ≠ 1, x ≠ -1 знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

D(*f*)=(-∞;1)(-1:1)(1;+∞).

2. Исследуем функцию на честность:

*f f*(x)

Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при x ≥ 0.

3. Точек пересечения графика функции с осью ОХ нет,

Найдем точки пересечения графика функции с осью ОУ: если 

20

4. Найдем асимптоты графика. Вертикальной асимптотой является прямая x = 1, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить  *f*(*x)*:

.

Значит, y = 1 – горизонтальная асимптота графика функции.

5. Найдем критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

y′.

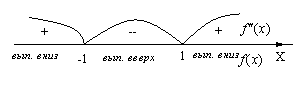
Критические точки найдем из соотношения *y´ = 0*. Получаем *–4x = 0*, откуда находим, что *х = 0.* При х < 0 имеем y´ > 0, а при х > 0 имеем y´ < 0. Значит, х = 0 – точка максимума функции, причем уmax = *f*(0)=.

При х > 0 имеем y´ < 0, но следует учесть наличие точки разрыва х = 1. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке [0;1) функция убывает, на промежутке (1;+∞) функция также убывает.

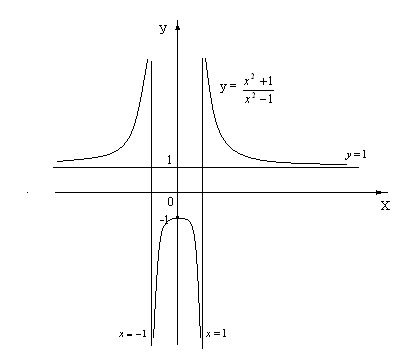
1. Вычислим вторую производную



 нигде не обращается в ноль, критическими точками будут только точки . Определим знак  в интервалах:



7. Отметим (0;-1) – точку максимума, построим прямые у = 1 – горизонтальную асимптоту, что x = 1 и x = - 1– вертикальные асимптоты,



**Самостоятельная работа №7.**

**Вариант – 1.**

1. Найти промежутки монотонности функции
2. Исследовать на экстремум функцию +9x+3.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке .
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции

**Вариант – 2.**

1. Найти промежутки монотонности функции .
2. Исследовать на экстремум функцию +24x-4.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке .
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции

**Вариант – 3.**

1. Найти промежутки монотонности функции
2. Исследовать на экстремум функцию -9x-4.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке .
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции

**Вариант – 4.**

1. Найти промежутки монотонности функции
2. Исследовать на экстремум функцию +15x+1.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке .
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции

**Расчетно-графическая работа.**

Исследуйте и постройте график данной функции.

**Вариант – 1.**

**Вариант – 2.**

**Вариант – 3.**

**Вариант – 4.**

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. В чем заключается признак возрастания и убывания функций?
2. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.
3. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?
4. Как пишется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?
5. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
6. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.
7. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

**Практическое занятие № 8.**

**Тема**: **Приложения определённого интеграла в геометрии. Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.**

**Цель**: Проверить на практике понятие определённого интеграла, умение вычислять определённый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. Умение вычислять площадь фигур с помощью определенных интегралов. Закрепление умений и навыков решения прикладных задач с помощью определённого интеграла.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Приложения определённого интеграла в геометрии. Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №7.

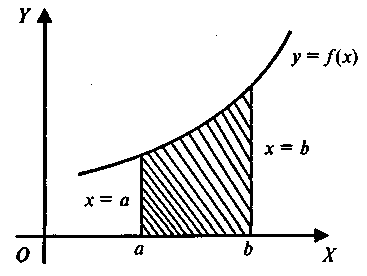
**›** Ответить на контрольные вопросы.

***Теоретический материал и примеры вычисления определённого интеграла.***

*Геометрический смысл определённого интеграла*

Площадь фигуры, ограниченной кривой *y = f (x)*, где *f (x) > 0* , осью *OX* и двумя прямыми *x = a* и *x = b* (рис. 1), выражается определённым интегралом:

******



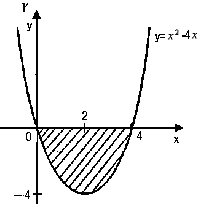
*Примеры***:**

1. Определить площадь *S* фигуры, заключённой между ветвью кривой *y = x2*, осью *OX* и прямыми  *x = 0, x = 3* (рис.2).

Решение: ******



2) Найти площадь *S* фигуры, заключённой между осью *OX* и кривой *y = x2 – 4x* (рис.3)



36

Решение: рассмотрим точки пересечения кривой *y = x2 – 4x* с осью OX:

*y = 0;  x2 – 4x = 0  x ( x – 4 ) = 0;  x1 = 0* или *x2 = 4.*

Найдём производную функции *y’ = 2x – 4,*  и точки экстремума:

*y’ = 0 *  *2x – 4 = 0;  x = 2; y” = 2 > 0;  x = 2* – точка *min; y(2) = - 4.*

Искомая площадь ограничена сверху осью *OX* , снизу графиком функции *y = x2 – 4x*, слева прямой *x = 0*, справа прямой *x = 4*. Так как на отрезке ** *y < 0*, то

 *(кв.ед.)*

3) Найти площадь фигуры, заключённой между линиями *y = x3 , x = -1. x = 2* и осью *OX*

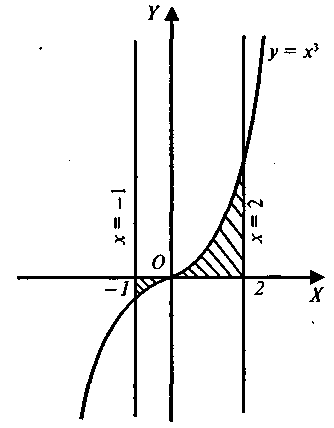


рис.4

Решение: найдем точки пересечения графика функции  с осью ОХ(см. рис 4):

*y = x3; y = 0  x = 0;* Вычислим производную функции:  *y’ = 3x2; y’ = 0  x = 0.* Найдем значение второй производной в точке *х=0: y” = 6x; y” (0) = 0.* Вычислим  *y”(-1) = -=6;  y”(1) = 6; * Т.к*. y”* меняет знак при переходе через *х =0* ** т. *(0;0)*  – точка перегиба. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

 *(кв.ед.)*

**3. Расчетно-графическая работа**

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните рисунок.

**Вариант – 1.**

1. ;

**Вариант – 2.**

1. ;

**Вариант – 3.**

1. ;

**Вариант – 4.**

1. .
2. ;

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что такое определенный интеграл?

2. Что в записи означают: а) числа ; б) ; в) ; г) ?

3. Зависит ли приращение от выбора первообразной?

4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

6. Перечислите все пять случаев применения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?

8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

**Практическое занятие 9.**

**Тема:****Решение дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка.**

**Цель:** отработка умений и навыков решения простейших дифференциальных

уравнений 1-го и 2-го порядка.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Решение дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №8.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

***Теоретический материал и примеры решения дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков.***

|  |
| --- |
| **Уравнения с разделяющимися переменными** |
|  |
| Дифференциальное уравнение первого порядка *y'* = *f*(*x,y*) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функцию *f*(*x,y*) можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от *x* и *y*:  правая часть уравнения с разделяющимися переменными  где *p*(*x*) и *h*(*y*) − непрерывные функции.   Рассматривая производную *y'* как отношение дифференциалов http://www.math24.ru/images/1fodi2.gif, перенесем *dx* в правую часть и разделим уравнение на *h*(*y*):  разделение переменных  Разумеется, нужно убедиться, что *h*(*y*) ≠ 0. Если найдется число *x*0, при котором *h*(*x*0) = 0, то это число будет также являться решением дифференциального уравнения. Деление на *h*(*y*) приводит к потере указанного решения.   Обозначив http://www.math24.ru/images/1fodi4.gif, запишем уравнение в форме:  http://www.math24.ru/images/1fodi5.gif  Теперь переменные разделены и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение:  интегрирование уравнения с разделяющимися переменными  где *C* − постоянная интегрирования.   Вычисляя интегралы, получаем выражение  общее решение уравнения с разделяющимися переменными  описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными. |

|  |
| --- |
| **Однородные уравнения** |
|  |
| ***Определение однородного дифференциального уравнения***  Дифференциальное уравнение первого порядка  дифференциальное уравнение первого порядка  называется *однородным*, если правая часть удовлетворяет соотношению  условие однородности уравнения  для всех значений *t*. Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией нулевого порядка по отношению к переменным *x* и *y*:  однородная функция нулевого порядка  Однородное дифференциальное уравнение можно также записать в виде  однородное уравнение  или через дифференциалы:  однородное уравнение в дифференциалах  где *P*(*x,y*) и *Q*(*x,y*) − однородные функции одинакового порядка. |
| **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка** |
|  |
| ***Определение линейного уравнения первого порядка***  Дифференциальное уравнение вида  линейное дифференциальное уравнение  где *a*(*x*) и *b*(*x*) − непрерывные функции *x*, называется *линейным неоднородным*  *дифференциальным уравнением первого порядка*. |

**Общий вид линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.** Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида y''+ρy'+qy=f(x), где ρ и q – вещественные числа, f(x) – непрерывная функция, называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка вида:

y''+ρy'+qy=0, (1) у которого правая часть f(x) равна нулю. Такое уравнение называется однородным.

Уравнение K2+ρK+q=0 , (2) называется характеристическим уравнением данного уравнения (1).

Характеристическое уравнение (2) является квадратным уравнением, имеющим два корня. Обозначим их через К1 и К2.

Общее решение уравнения (1) может быть записано в зависимости от величины дискриминанта D=ρ2–4q уравнения (2) следующим образом:

1. При D>0 корни характеристического уравнения вещественные и различные (К1≠К2), и общее решение имеет вид ……..у=С1ех+С2е-2х

2. При D=0 корни характеристического уравнения вещественные и равные (К1=К2=К), и общее решение имеет вид: …у=Ах2+Вх+С…

3. Если D<0, то корни характеристического уравнения комплексные: , где – мнимая единица, и общее решение (К1=α+βi, К2=α–βi, β≠0), имеет вид y=eαx(C1 cosβx+C2 sinβx).

**Проверочные задания из практического занятия №9.**

Решите дифференциальные уравнения.

**Вариант – 1.**

1. =

**Вариант – 2.**

1. )dy-2xydx=0.

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое называется частным?
4. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?
5. Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?
6. Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?
7. Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого, третьего порядка?
8. Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения?
9. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического уравнения?
10. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
11. Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными?
12. Как решается уравнение с разделенными переменными?
13. Чем отличается уравнение с разделяющимися переменными от уравнения с разделенными переменными? Как разделяют переменные?
14. Каков алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными?
15. В чем заключается задача Коши? Каков его геометрический смысл?
16. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка?
17. Какими величинами являются и от чего зависят коэффициенты p и q в линейном дифференциальном уравнении первого порядка?
18. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?
19. Какой вид имеет простейшее дифференциальное уравнение второго порядка? Как оно решается?
20. Как определяется и как записывается в общем виде линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
21. Что такое характеристическое уравнение?

**Практическое занятие 10.**

**Тема:Исследование сходимости рядов. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.**

**Цель:** отработка умений и навыков в исследовании сходимости рядов с помощью признаков Даламбера, Коши, Лейбница. Уметь раскладывать элементарные функции в ряд Тейлора.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Исследование сходимости рядов. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №9.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

**по решению задач.**

|  |
| --- |
|  |
|  |

Сходимость рядов. Признаки сравнения

### Необходимый признак сходимости, вообще говоря, не гарантирует сходимости ряда. Сходимость или расходимость ряда устанавливается с помощью достаточных признаков. **Признаки абсолютной сходимости**

**Признак сравнения**

Если \exist N_0: |a_n| \leqslant b_nпри n \geqslant N_0, то:

* если ряд \sum b_nсходится, то ряд \sum a_nсходится абсолютно
* если ряд \sum a_nрасходится, то ряд \sum b_nрасходится

Согласно [критерию Коши](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B9_%D1%81%D1%85%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8_%D0%9A%D0%BE%D1%88%D0%B8), \forall \varepsilon > 0\ \exist N \geqslant N_0\ \forall m \geqslant n \geqslant N:\left|\sum_{k=n}^{m}b_k\right| \leqslant \varepsilon. Значит, \left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m}|a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m}b_k \leqslant \left|\sum_{k=n}^{m}b_k\right| \leqslant \varepsilon, и по критерию Коши ряд \sum a_nсходится. Второе утверждение следует из первого, так как если бы ряд \sum b_nсходился, то и ряд \sum a_nсходился бы.

**Признак сходимости рядов с монотонно убывающими членами**

Пусть a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant ... \geqslant 0. Тогда ряд \sum_{n=1}^{\infty} a_n сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k}a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + ...

**Признаки Коши и Даламбера**

[Признак д’Аламбера](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA_%D1%81%D1%85%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8_%D0%B4%E2%80%99%D0%90%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D0%B1%D0%B5%D1%80%D0%B0)

Ряд \sum a_n

1. Сходится абсолютно, если \varlimsup_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1
2. Расходится, если \varliminf_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| >  1
3. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых \varliminf_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|

[Признак Коши](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA_%D0%9A%D0%BE%D1%88%D0%B8)

Пусть задан ряд \sum a_nи \alpha = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. Тогда

1. Если \alpha < 1, то ряд сходится абсолютно
2. Если \alpha > 1, то ряд расходится
3. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых \alpha = 1

достаточные признаки сходимости или расходимости рядов.

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Назовите свойства сходящихся рядов.
2. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
3. Назовите достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.
4. В чем заключается признак сравнения?
5. Сформулируйте признак сходимости Даламбера.
6. В чем заключается признак Коши и интегральный признак?
7. В чем отличие знакопеременного ряда от знакочередующегося?
8. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда и условно сходящегося ряда
9. Сформулируйте признак Лейбница о сходимости знакопеременного ряда.
10. Понятие степенного ряда.
11. Ряд Тейлора.
12. Ряд Маклорена.

**Проверочные задания для практического занятия №10 .**

Числовые ряды. Признак Даламбера.

**Вариант – 1.**

1. Найдите 4 первых члена ряда по заданному общему члену .
2. Найдите формулу общего члена ряда:

а)

б) .

1. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда .

**Вариант – 2.**

1. Найдите 4 первых члена ряда по заданному общему члену .
2. Найдите формулу общего члена ряда:

а)

б) .

1. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда .

**Вариант – 3.**

1. Найдите 4 первых члена ряда по заданному общему члену .
2. Найдите формулу общего члена ряда:

а)

б) .

1. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда .

**Вариант – 4.**

1. Найдите 4 первых члена ряда по заданному общему члену .
2. Найдите формулу общего члена ряда:

а)

б) .

1. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда .

Признак Лейбница. Промежуток сходимости. Ряд Маклорена.

**Вариант – 1.**

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) ;

б) .

1. Найдите промежуток сходимости степенного ряда .
2. Разложите в ряд Маклорена функцию

**Вариант – 2.**

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) ;

б) .

1. Найдите промежуток сходимости степенного ряда .
2. Разложите в ряд Маклорена функцию

**Вариант – 3.**

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) ;

б) .

1. Найдите промежуток сходимости степенного ряда ⋅.
2. Разложите в ряд Маклорена функцию

**Вариант – 4.**

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) ;

б) .

1. Найдите промежуток сходимости степенного ряда .
2. Разложите в ряд Маклорена функцию

# Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

**4.1. Основная литература**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование | Авторы | Место издания | Год издания | Наличие | |
| в научно-техническойбиблиотеке, экз | в ЭБС, адрес в сети Интернет |
| 1. | Математика | Богомолов Н.В. | Москва, Дрофа | 2013г |  |  |
| 2. | Математика. Дидактические задания | Богомолов Н.В. | Москва, Дрофа | 2013г |  |  |
| 3. | Сборник задач по математике | Богомолов Н.В. | Москва, Дрофа | 2013г |  |  |
| 4. | Математика, учебник для средних специальных учебных заведений | Пехлецкий И.Д. | Москва, Академия | 2012г |  |  |
| 5. | Математика: учебное пособие | Омельченко В.П. | Ростов н/Д: Феникс | 2013г |  |  |
| 6. | Конспект лекций по высшей математике | Письменный Д.Т. | Москва, Айрис-пресс | 2014г |  |  |

**4.2. Дополнительная литература**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование | Авторы | Место издания | Год издания | Наличие | |
| в научно-техническойбиблиотеке, экз | в ЭБС, адрес в сети Интернет |
| 1. | Дискретная математика | Спирина М.С. | М., Академия | 2013г |  |  |
| 2. | Введение в дискретную математику | Яблонский С.В. | М., Высшая школа | 2013г |  |  |
| 3. | Математика для техникумов, в 2 частях | Яковлев Г.Н. | Новая волна | 2012г |  |  |

**4.3. Интернет-ресурсы**

* 1. [http://ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org/)

Энциклопедия

* 1. [http://webmath.exponenta.ru](http://webmath.exponenta.ru/)

На сайте дан теоpетический и практический матеpиал по высшей математике

* 1. <http://www.mathprofi.ru>

**Высшая математика для заочников и не только**

* 1. [http://matematik-master.ru](http://matematik-master.ru/)

На сайте можно найти лекции по высшей математике, решения типовых примеров

* 1. [http://integraloff.net](http://integraloff.net/)

Сайт предназначен для решения различных задач по математике в режиме **онлайн**

* 1. [http://lib.mexmat.ru](http://lib.mexmat.ru/)

Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ

* 1. [http://www.exponenta.ru](http://www.exponenta.ru/)

Образовательный математический сайт

* 1. [http://www.krugosvet.ru](http://www.krugosvet.ru/)

Универсальная научно-популярная онлайн-энциклопедия