Департамент образования города Москвы

Государственное образовательное учреждение
Среднего профессионального образования
Полиграфический колледж № 56

МАТЕМАТИКА

Методические указания:

Руководство по проведению лабораторных занятий по разделу: «Основные численные методы»

Для студентов очного
и заочного отделений
всех специальностей
(базовый уровень)

Москва, 2010

Методические указания составлены в
соответствии с рабочей программой
по дисциплине «Математика» для
студентов очного и заочного отделений
всех специальностей (базовый уровень)

Составитель: Сенокосова Е.Н., преподаватель математики

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по теме «Основные численные методы» составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» с целью оказания помощи при изучении раздела 4 «Основные численные методы».

В данном пособии рассмотрены обзором теоретические аспекты тем «Численное интегрирование», «Численное дифференцирование», «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений».

При изучении темы «Численное интегрирование» рассматриваются следующие вопросы:

Содержание темы:

Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона. Абсолютная погрешность при численном интегрировании.

Учебные цели:

– повторить сведения об интегралах, полученные в школе;
– изучить формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Знания:

– вычислить интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона.

В теме «Численное дифференцирование» рассматриваются вопросы.

Содержание темы:

Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона. Погрешность в определении производной.

Учебные цели:

– изучить интерполяционные формулы Ньютона и способы их применения.

Знания:

– интерполяционные формулы Ньютона;
– таблица конечных разностей.

Умения:

– по табличным данным находить аналитическое выражение производной.

При изучении темы «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Содержание ты:

Построение интегральной кривой. Метод Эйлера.

Учебные цели:

– изучить метод Эйлера при решении задач Коши;
– научить решению задач на нахождение производственных функции в точке *x* методом численного дифференцирования.

Знания:

– метод Эйлера для решения задачи Коши.

Умения:

– находить значение функции, определяемое заданным дифференциальным уравнением и начальными условиями с использованием метода Эйлера.

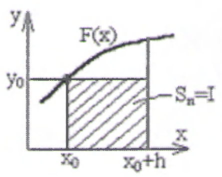
Численное интегрирование

Определенным интегралом функции f(x), взятом в интервале от a до b, называется предел, к которому стремится интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ *при стремлении всех промежутков* Δx_i *к нулю*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}$$

При приближенном вычислении определенного интеграла шаг интегрирования $h=\Delta x$ выбирается конечным: $\int_b^a f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \approx \sum I_i$, где I_i - элемент интегральной суммы. Заменяя подынтегральную функцию на каждом шаге отрезками линий нулевого, первого и второго порядков, получаем приближенные формулы для вычисления интеграла методами прямоугольников, трапеций и Симпсона соответственно.

1.

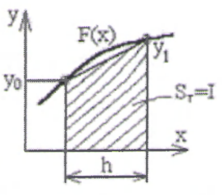


<u>*Правило прямоугольников*</u> (п=0). Заменяем график функции F(x) горизонтальной линией (линий нулевого порядка) и вычисляем значение элемента интегральной суммы как площадь прямоугольника

$$I = \int_{x_0}^{x_0+h} F(x)dx \approx y_0 \cdot h$$, где h - шаг интегрирования, y_0 - значение функции в точке $x=x_0$

$y(x_0)=y_0$

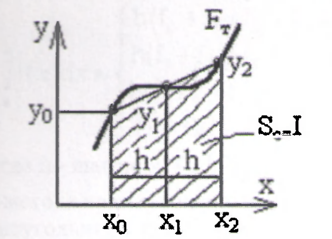
2.



<u>*Правило трапеций*</u> (п=1). Заменяем график функции F(x) прямой, проходящей через две точки (x_0,y_0) и (x_0+h,y_1), и вычисляем значение элемента интегральной суммы как площадь трапеции

$$I = \int_{x_0}^{x_0+h} F(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h$$

ч·



Правило Симпсона (n=2). Заменяем график функции F(x) квадратичной параболой, проходящей через три точки с координатами (x_0,y_0), (x_0+h,y_1), (x_0+2h,y_2). Расчетную формулу для вычисления элемента интегральной суммы получим, используя интерполяционный многочлен Лагранжа, в виде

$y(x)=y_0A_0(x)+y_1A_1(x)+y_2A_2(x)$, где

$$A_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)},$$

$$A_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$A_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

При $x_0=0$; $x_1=h$; $x_2=2h$, получим

$$A_0(x)=\frac{(x-h)(x-2h)}{2h^2}=\frac{x^2-x\cdot 3h+2h^2}{2h^2},$$

$$A_1(x)=\frac{x(x-2h)}{h(-h)}=\frac{x^2-2hx}{-h^2},$$

$$A_2(x)=\frac{x(x-h)}{2h^2}=\frac{x^2-hx}{2h^2}.$$

$$I=\int_{x_0=0}^{x_0+2h}y(x)dx=\int_0^{2h}y_0A_0(x)dx+\int_0^{2h}y_1A_1(x)dx+\int_0^{2h}y_2A_2(x)dx=$$

$$\left\{\begin{array}{c}
\int_0^{2h}y_0A_0(x)dx=\frac{y_0}{2h^2}\left[\left(\frac{x^3}{3}-3h\frac{x^2}{2}+2h^2x\right)\Big\|_0^{2h}\right]= \\
\frac{y_0}{2h^2}\cdot\left[\frac{8h^3}{3}-\frac{3h\cdot 4h^2}{2}+2h^2\cdot 2h\right]=\frac{y_0h^3}{2h^2}\cdot\frac{16-36+24}{6}=\frac{y_0h}{3} \\
\int_0^{2h}y_1A_1(x)dx=? \\
\int_0^{2h}y_2A_2(x)dx=?
\end{array}\right\}$$

$$I=\frac{y_0h}{3}+\frac{4y_1h}{3}+\frac{y_2h}{3}=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

При интегрировании на отрезке [a,b] расчетные формулы для методов прямоугольника, трапеций и Симпсона имеют вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \begin{cases} h(f_a + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-1}) & \text{- прям.1} \\ h(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-1} + f_b) & \text{- прям.2} \\ h(f_a/2 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_b/2) & \text{– трапец.} \\ (h/3)(f_a + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \ldots + 4f_{n-1} + f_b) & \text{– Симсон} \end{cases}$$

где h - шаг по x, f_a, f_i, f_b - значения функции при x равном a, x_i, b соответственно.

Для метода прямоугольников приведены две расчетные формулы, так как площадь прямоугольника на каждом шаге интегрирования может определяться по левой или правой стороне. Суть метода прямоугольников для отрезка [a,b] проиллюстрирована на рисунке, при этом площадь под кривой f(x) (вспомните геометрический смысл определенного интеграла) заменена суммой площадей заштрихованных прямоугольников.

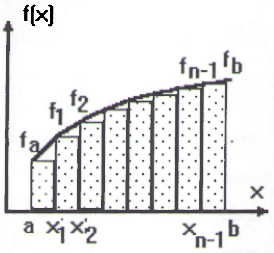


Рис. Численное интегрированние методом прямоугольников

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x^2 dx$ четырьмя численными методами, сравнить с точным значением.

Этапы решения задачи приведены в таблице

Таблица

N	*Этап программирования*	*Выполнение*
1.	*Постановка задачи*	Вычислить определенный интеграл четырьмя численными методами и сравнить с точным значением $\int_0^1 x^2 dx$
2.	*Математическое описание*	*Аналитическое решение:* $I = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0.333$ *Численное решение:* *выполнить самостоятельно*
3.	*Разработка структограммы*	*Выполнить самостоятельно*
4.	*Написание программы*	*Выполнить самостоятельно*
5.	*Отладка и получение результатов*	*Выполнить самостоятельно*

Контрольное задание. Лабораторная работа 1.
Численное интегрирование
Задание.

1. Вычислить значение определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ аналитически и численно четырьмя методами для пяти значений N, где N – число разбиений интервала интегрирования N=10; 20; 50; 100; 1000. Результаты расчета вывести на экран и распечатать в виде таблицы.

Таблица
Представление результатов расчета

N	Аналит. Значение	Метод прямоуг. 1	Метод прямоуг. 2	Метод трапеций	Мето Симпсон
10					
20					
50					
100					
1000					

2. Построить графики функций I=F(N).
Варианты интегралов приведены в таблице

Таблица
Варианты интегралов

Вар.	Вид интеграла	Вар.	Вид интеграла
1	$\int_1^4 \frac{dx}{x^3}$	14	$\int_0^1 ln(t+1)dt$
2	$\int_1^9 3\sqrt{t}dt$	15	$\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}dx$
3	$\int_1^9 3\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$	16	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{sds}{\sqrt{4-s^2}}$
4	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x}}$	17	$\int_0^{\pi/2} t\cos(t)dt$
5	$\int_1^4 \frac{(1+t)dt}{\sqrt{2t}}$	18	$\int_{\pi/8}^{\pi/9} \frac{dt}{\sin^2(2t)}$
6	$\int_1^2 (\sqrt{z}-1)^2dz$	19	$\int_{\pi/8}^{\pi/9} \frac{dt}{\cos^2(2t)}$
7		20	

	$\int_0^3 e^{x/3}\,dx$		$\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\,dt$
8	$\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$	21	$\int_0^{\pi/2} t\cos(2t^2)\,dt$
9	$\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{4+x^2}$	22	$\int_0^{\pi/3} \cos^2(3t)\,dt$
10	$\int_1^t (2+3\gamma-\gamma^2)\,d\gamma$	23	$\int_0^1 e^t\sqrt{(1-e^t)}\,dt$
11	$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+tg^2(x)}{(1+tg(x))^2}\,dx$	24	$\int_1^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$
12	$\int_0^{\pi/3} \sin(3x)\,dx$	25	$\int_0^{\pi/3} \cos(4t)\cos(2t)\,dt$
13	$\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$	26	$\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\cos(3t)\,dt$

Содержание отчета:

1. Название, цель работы и задание.
2. Математическое описание, алгоритм (структограмма) и текст программы.
3. Таблица результатов расчета, пять графиков зависимости I(N) для четырех численных методов и точного значения интеграла, выводы по работе.

Численное дифференцирование

<u>Производная функции</u> есть предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении к нулю приращения независимой переменной

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

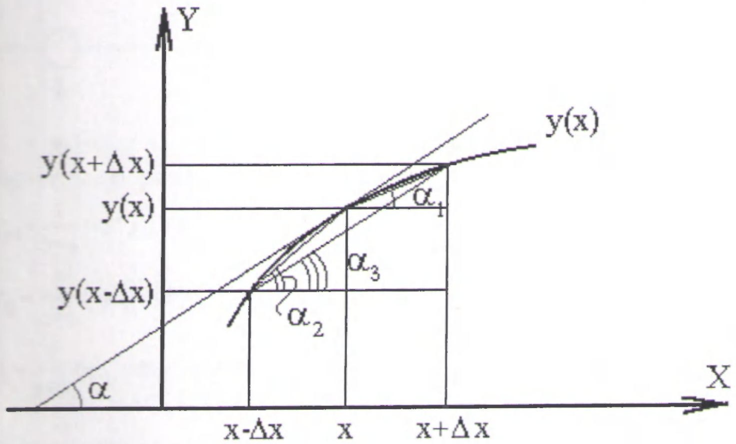
При численном нахождении производной заменим отношение бесконечно малых приращений функций и аргумента $\frac{dy}{dx}$ отношением конечных разностей. Очевидно, что чем меньше будет приращение аргумента, тем точнее численное значение производной.

Первая производная. Двухточечные методы.

Для двухточечных методов при вычислении производных используется значение функции в двух точках. Приращение аргумента задается тремя способами, откладывая $\Delta x = h$ вправо, влево и в обе стороны от исследуемой точки. Соответственно получается три двухточечных метода численного дифференцирования:

<u>метод 1</u>	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$
<u>метод 2</u>	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x}$
<u>метод 3</u>	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

Суть указанных методов проиллюстрирована на рисунке. Численное значение тангенса угла α образованного касательной к графику *y(x)* и осью абсцисс, показывает точное значение производной(геометрический смысл производной). Тангенсы углов α_1, α_2, α_3 соответствуют приближенным значениям производных, определенных методами 1,2,3 соответственно (подумайте почему?).



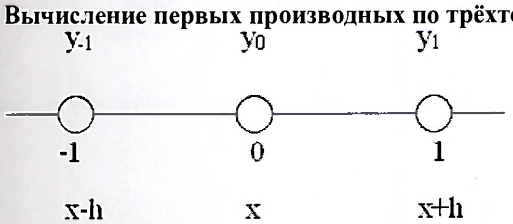
Пример. Вычислить точное и приближенное (тремя методами) значения производной функции y=x*x в точке x=1 с шагом h=1 и h=0.001.

Этапы решения задачи приведены в таблице.

Таблица

N	Этап программирования	Выполнение
1.	*Постановка задачи*	Вычислить точное и приближенное (тремя методами) значения производной функции y=x*x в точке x=1 с шагом h=1 и h=0.001.
2.	*Математическое описание*	Аналитическое решение: y'=2x , y'(1)=2, Численное решение для шага: h=1 $y_1' = \frac{y(1+1)-y(1)}{1} = \frac{4-1}{1} = 3,$ $y_2' = \frac{y(1)-y(1-1)}{1} = \frac{1-0}{1} = 1,$ $y_3' = \frac{y(1+1)-y(1-1)}{1*2} = \frac{4-0}{2} = 2,$ для шага h=0.001 $y_1' = \frac{1.001*1.001-1*1}{0.001} = 2.001,$ $y_2' = \frac{1*1-0.999*0.999}{0.001} = 1.999,$ $y_3' = \frac{1.001*1.001-0.999*0.999}{0.001*2} = 2.$
3.	*Разработка структограммы*	*Выполнить самостоятельно*
4.	*Написание программы*	*Выполнить самостоятельно*
5.	*Отладка и получени результатов*	*Выполнить самостоятельно*

Вычисление первых производных по трёхточечным схемам.



Расчетные формулы для указанной трехточечной схемы имеют вид:

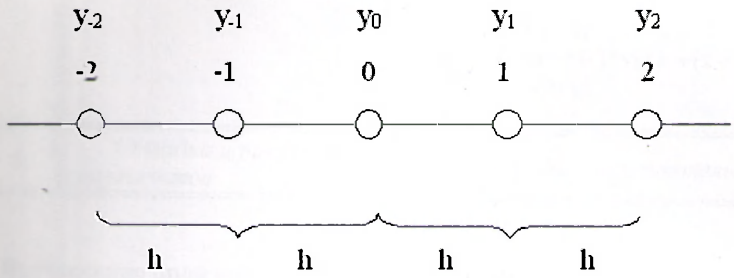
$$y'_{-1} = \frac{1}{2*h}(-3*y_{-1}+4*y_0-y_1);$$

$$y'_0 = \frac{1}{2*h}(-y_{-1}+0*y_0+y_1);$$

$$y'_1 = \frac{1}{2*h}(y_{-1}-4*y_0+3*y_1).$$

Вычисление производных второго порядка.

Вторая производная вычисляется как первая производная от первой производной. Для следующей пятиточечной схемы



расчетная формула имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{y'_1 - y'_{-1}}{2*h} = \frac{\frac{y_2 - y_0}{2*h} - \frac{y_0 - y_{-2}}{2*h}}{2*h} = \frac{y_2 - 2*y_0 + y_{-2}}{(2*h)^2} =$$

$$= \left\{\text{при } \bar{h} = 2h\right\} = \frac{y_1 - 2*y_0 + y_{-1}}{\bar{h}^2}$$

Пример. Написать программу для нахождения второй производной функции $y = 2 * x^4$ в точке x=1 с шагом h=0.01, сравнить с точным значением.

Таблица

N	*Технологическая операция*	*Выполнение*
1.	*Постановка задачи*	Написать программу для нахождения второй производной функции $y = 2 * x^4$ в точке x=1 с шагом h=0.01, сравнить с точным значением.
2.	*Математическое описание*	Аналитическое значение $y''_{m\omega} = 24 * x^2$; $y''(1)_{m\omega} = 24$. Приближенное значение $y'' \approx \frac{y(1.01) - 2*y(1) + y(0.99)}{0.01 \cdot 0.01} = 24.0004$
3.	*Разработка структограммы*	Описание x,y,h x=1; h=0.01 $\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y(x+h) - 2*y(x) + y(x-h)}{h^2}$ Вывод $\frac{d^2y}{dx^2}$

4.	*Написание программы*	**Program P7;**
		Var x,ddy,h:real;
		Function y(x:real):real;
		begin
		y:=2*sqr(sqr(x));
		end;
		begin

		x:=1;h:=0.01; **ddy:=(y(x+h)-2*y(x)+y(x-h))/h/h;** **writeln(ddy);** **end.**
5.	*Отладка и получение результатов*	*Выполнить сомостоятельно.*

Вычисление производных третьего порядка.

Производные третьего порядка вычисляются как первая производная от производной второго порядка. Для рассмотренной пятиточечной схемы расчетная формула имеет вид

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \approx \frac{y''_1 - y''_{-1}}{2*h} = \frac{\dfrac{y_0 - 2*y_1 + y_2}{h^2} - \dfrac{y_{-2} - 2*y_{-1} + y_0}{h^2}}{2*h} = \frac{y_2 - 2*y_1 + 2*y_{-1} - y_{-2}}{2*h^3}$$

Контрольное задание. Лабораторная работа 2.
Численное дифференцирование

1. Вычислить значение производной в произвольной точке $x=x_0$ аналитически и численно тремя методами для пяти значений приращения аргумента Δx=1; 0.2; 0.1; 0.01; 0.001. Результаты расчета вывести на экран и распечатать в виде таблицы

Таблица вывода результатов расчета

Δx	y (x)	y'(x)	$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$	$\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}$	$\frac{y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$
1					
0.2					
0.1					
0.01					
0.001					

2. Построить графики функций $y'(x_0) = F(\Delta x)$. Варианты функций приведены в таблице.

Таблица

Варианты функций

Вар.	Вид функции	Вар.	Вид функции
1	$x(t)=Ae^{-at}\sin(\omega t+b)$	14	$y=ctg^m(ax)$
2	$x(t)=Ae^{at}\cos(\omega t+b)$	15	$y(x)=(e^{ax}-e^{-ax})^n$
3	$y(x)=\ln\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$	16	$x(t)=t^{at}$
4	$y\upsilon(t)=\cos^2(at+b)$	17	$y(x)=(ax)^{\sin(bx)}$
5	$y\upsilon(t)=\sin^2(at+b)$	18	$y(x)=arctg^n\frac{b+ax}{b_1+a_1x}$
6	$s(\varphi)=\sqrt{a+\cos^2(\varphi^n)}$	19	$S(t)=\sqrt{A-2a^{t^n}}$

7	$q(t)=(a-bt^n)^n$	20	$y(x) = ctg^n(\arcsin \ln \frac{a+bx}{c+dx})$
8	$y(x)=x^n\cos(ax)$	21	$R(\varphi)=\arccos^m(a+b\varphi^n)$
9	$y(x) = \frac{\sin(bx)}{x^m}$	22	$r(\varphi)=c^{\sin(a\varphi+b)}$
10	$x(t) = \frac{a}{\sqrt[n]{t}} - \frac{b}{\sqrt[m]{t}}$	23	$y(x)=\ln(tg^n(ax+b))$
11	$R(\varphi) = \frac{\sin^n(\varphi)}{\cos^m(\varphi)}$	24	$v\upsilon(t)=\log_a(t^n+b^m)^k$
12	$S(\varphi)=B\cos^n(a\varphi+b)$	25	$S(\varphi)=A\sin^n(a\varphi+b)$
13	$y=tg^{ax}(x/a)$	26	$X(t)=\lg(at^n+b)$

Примечание. Значение параметров a, b, c, d, m, n, A, B выбрать самостоятельно.

Содержание отчета:

1. Название, цель работы и задание.
2. Математическое описание, алгоритм (структограмма) и текст программы.
3. Таблица результатов расчета, четыре графика зависимости $y'(x_0) = F(\Delta x)$ для трехчисленных методов и точного значения интеграла, выводы по работе.

Численное решение дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида F(x,y,y')=0 или y'=f(x,y). Функция y(x), при подстановке которой уравнение обращается в тождество, называется решением дифференциального уравнения.

Рассмотрим несколько численных методов решения дифференциальных уравнений первого порядка. Описание численных методов приводится для уравнения в виде y'=f(x,y).

1. Метод Эйлера.

Рассмотрим два варианта вывода расчетных формул

- вариант 1 (аналитический) y=f (x,y)

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x,y)$$

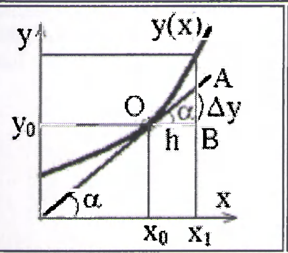
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 = h$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0)$$

$y_1=y_0+h*f(x_0,y_0)$ $x_1=x_0+h$	Расчетные формулы для 1-го шага
$y_{i+1}=y_i+h*f(x_i,y_i)$ $x_{i+1}=x_i*h$	Расчетные формулы для i-го шага

- вариант 2 (графический)

 	$tg\,\alpha = f(x_0,y_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{h}$ $y_1=y_0+f(x_0,y_0)*h$; $x_1=x_0+h$ $y_{i+1}=y_i+h*f(x_i,y_i)$
$k_1=h*f(x_i,y_i)$ $y_{i+1}=y_i+k_i$ $x_{i+1}=x_i+h$	Аналогично варианту 1

Следующие расчетные формулы приводятся без вывода.

2. Модифицированный метод Эйлера (вариант 1).

$y_{i+1}=y_i+hf(x_i+h/2,\ y_i+hf(x_i,y_i)/2)$,

$x_{i+1}=x_i+h$.

3. Модифицированный метод Эйлера (вариант 2).

$y_{i+1}=y_i+(h/2)[f(x_i,y_i)+f(x_i,+h,y_i+hf(x_i,y_i))]$,

$x_{i+1}=x_i+h$.

4. Метод Рунге-Кутта третьего порядка.

   $y_i+1=y_i+(k_1+4k_2+k_3)/6$,

   $k_1=hf(x_i, y_i)$,

   $k_2=hf(x_i+h/2, y_i+k_1/2)$,

   $k_3=hf(x_i+h, y_i+2k_2-k_1)$,

   $x_{i+1}=x_i+h$.

5. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

   $y_{i+1}=y_i+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$,

   $k_1=hf(x_i,y_i)$,

   $k_2=hf(x_i+h/2, y_i+k_1/2)$,

   $k_3=hf(xi+h/2, y_i+k_2/2)$,

   $k_4=hf(x_i+h, y_i+k_3)$,

   $x_{i+1}=x_i+h$,

   где y_{i+1},y_i - значения искомой функции в точках x_{i+1}, x_i соответственно, индекс i показывает номер шага интегрирования, h - шаг интегрирования. Начальные условия при численном интегрировании учитываются на нулевом шаге: i=0, $x=x_0$, $y=y_0$.

Пример. Численно и аналитически решить дифференциальное уравнение $dy/dx=x^2$ при $y|_{x=0}=1$. Определить значение функции при $x_k=1$, h=1.

Решение задачи приведено в таблице.

Таблица

N	*Этап программирования*	*Выполнение*
1.	*Постановка задачи*	Решить дифференциальное уравнение $dy/dx=x^2$ при $y\|_{x=0}=1$. Определить знач. функции при $x_k=1$, h=1
2.	*Математическое описание*	1. *Аналитическое решение.* $dy/dx=x^2$ $\int_1^y dy = \int_0^x x^2 dx$ $y=1+x^3/3$, $y_k=y(1)=1+1/3=4/3$. 2. *Метод Эйлера.* $y_1 = y_k = y_0 + h \cdot f(x_0,y_0) =$ $= \left\{ \begin{array}{l} y_0 = 1 \\ h = 1 \\ f(x_0,y_0) = x_0^2 = 0 \end{array} \right\} = 1+0 = 1$ 3. *Модифицированный метод Эйлера 1.*

		$Y_1 = y_0 + k_2 = \begin{cases} y_0 = 1 \\ k_1 = hf(x_0, y_0 = 1*0 = 0) \\ k_2 = h * f(x + h/2, y_0 + k_1/2) = 1 \end{cases} = 1 +$ 4. *Модифицированный метод Эйлера 2.* $Y_1 = y_0 + (k_1 + k_2)/2 =$ $= \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 1 \cdot f(1,1) = 1 \end{cases} =$ $= 1 + (0+1)/2 = \frac{3}{2}$ 5. *Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.* $Y_1 = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 =$ $= \begin{cases} y_0 = 1 \\ k_1 = 0 \\ k_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = \frac{1}{4} \\ k_3 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) = \frac{1}{4} \\ k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 1 \end{cases} =$ $= 1 + \frac{0+2\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}+1}{6} = \frac{4}{3}$
3.	*Разработка структограммы*	*Выполнить самостоятельно*
4.	*Написание программы*	*Выполнить самостоятельно*
5.	*Отладка и получение результатов*	*Выполнить самостоятельно*

Контрольное задание. Лабораторная работа 3.
Численное решение дифференциальных уравнений
Задание.

1. Решить дифференциальное уравнение аналитически и численно указанными методами для двух значений шага интегрирования h=0.01; 0.001. Результаты расчета вывести на экран и распечатать в виде таблицы.
2. Построить графики функций y(x) (5 графиков).

Варианты уравнений и методов их решения приведены в таблице
Оформление результатов расчета

Таблица

x	Решения уравнения, y(x)				
	Аналит	Численное			
		метод 1		Метод 2	
		h=0.01	h=0.001	h=0.01	h=0.001

Варианты уравнений и методов их решения

Таблица

Вар.	Вид уравнения	Метод	Вар.	Вид уравнения	Метод
1	$y'=(xy^2+x)/(y-x^2y)$	1,4	14	$y'=\cos(t)-y$	3,5
2	$y'=(1-2x)/y^2$	2,4	15	$y'=\exp(bx)-ay$	1,4
3	$y'=(1-x^2)/xy$	3,4	16	$y'=-2y/(y^2-6x)$	2,4
4	$y'=(y^2-y)/x$	1,5	17	$y'=1/(2x-y^2)$	3,4
5	$y'=(1+y)/(tg(x)$	2,5	18	$y'=\sec(x)-y\ tg(x)$	1,5
6	$y'=\exp(x)-1$	3,5	19	$y'=(\exp(x)-y)/x$	2,5
7	$y'=y\ln(y)/\sin(x)$	1,4	20	$y'=1+y/(x(x+1))$	3,5
8	$y'=(1+y^2)/(1+x^2)$	2,4	21	$y'=(y+yx^2-x^2)/(x(1+x^2))$	1,4
9	$y'=4x-2y$	3,4	22	$y'=\cos(x-y)$	2,4
10	$y'=x\exp(-x^2)-2xy$	1,5	23	$y'=3x-2y+5$	3,4
11	$y'=2x-y$	2,5	24	$y'=\sin(x)-y$	1,5
12	$y'=\exp(-x)-2y$	3,5	25	$y'=\exp(x)-y$	2,5
13	$y'=\exp(-x)-2x$	1,4	26	$y'=\exp(2x)-1$	3,5

Примечание. Значение параметров a, b и начальные условия $y|_{x=x0}=y_0$ выбрать самостоятельно.

Содержание отчета:

1. Название, цель работы и задание.
2. Математическое описание, алгоритм (структограмма) и текст программы.
3. Результаты расчета, пять графиков зависимости y(x) и выводы по работе.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

В. С. Щипачев Основы высшей математики.— М.: Высшая школа, 2007.

Н. В. Богомолов Практические занятия по математике.— М.: Высшая школа, 2006.

Я. М. Ерусалимский Дискретная математика.— М.: Вузовская книга, 2007.

И. Д. Пехлецкий Математика.— М.: Мастерство, 2006.

Дополнительная литература

И. П. Натансон Краткий курс высшей математики.— С-Пб.: Лань, 2006.

П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1 и 2.— М.: Высшая школа, 2007.

И. И. Валуцэ Математика для техникумов.— М.: Наука, 2006.

Щипачев В. С. Задачи по высшей математике.— М.: высшая школа, 2005.

М. Я. Выгодский Справочник по высшей математике.— М.: Роскнига, 2001.